

Chapitre 2

Le modèle GeoChron

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la modélisation des propriétés du sous-sol imposait l'utilisation d'un maillage tridimensionnel et que les algorithmes géostatistiques s'appliquent principalement sur des maillages structurés. Ce maillage est construit en définissant une paramétrisation 3D de l'espace, puis en échantillonnant la fonction de paramétrisation afin de construire la grille.

Cependant, les grilles structurées déformées pour s'adapter à la géologie induisent des biais dans les calculs, principalement à cause de leur adaptation aux failles. Au final, il apparaît que les maillages utilisés pour la modélisation des propriétés regroupent trois concepts différents :

- la géométrie du réseau de failles (et éventuellement d'horizons) ;
- la paramétrisation 3D qui doit suivre les continuités sédimentaires ;
- et le modèle de propriété en lui-même, bâti dans l'espace paramétrique.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le modèle GeoChron, qui permet de dissocier ces trois concepts et d'aboutir ainsi à un modèle qui respecte au mieux chacune des contraintes, sans les approximations des grilles stratigraphiques structurées. La description de ce modèle fournie ici a été publiée récemment par J.-L. Mallet ([Mallet, 2004]) et nous ne faisons ici que reprendre, et compléter sur certains points, cette description. Le travail principal de cette thèse se situe plus particulièrement dans l'exploration des diverses possibilités d'implémentation de ce modèle et dans la construction des vecteurs rejet le long des failles (chapitres 3 et 4).

2.1 Principe général du modèle

La notion d'un espace paramétrique correspondant aux sédiments au moment de leur dépôt a été introduite en 1958 par Wheeler ([Wheeler, 1958]) dans le cadre de la *time stratigraphy*¹. Son idée initiale était que les unités stratigraphiques peuvent se décrire dans un espace défini par « deux dimensions d'espace latérales et une dimension verticale temporelle » (« *two lateral space dimensions and a vertical time dimension* »).

¹Plusieurs notions de stratigraphie portant des noms similaires en anglais et figurant dans peu de textes en français, nous préférons garder les termes anglais, qui risquent moins de prêter à confusion.

Le modèle *Geo-Chronological* ou GeoChron, qui constitue le cœur théorique de cette thèse, est basé sur une formulation mathématique de ce concept.

2.1.1 Les coordonnées paramétriques

Considérons un volume G dans l'espace géologique, tel qu'il est observable actuellement (figure 2.1). Ce volume peut être découpé par un ensemble de failles ou de discontinuités sédimentaires, qui divisent G en un ensemble fini de *blocs de faille*. Nous appellerons *espace géologique*, ou G -Space² l'espace euclidien à trois dimensions qui englobe G . Tout point $\mathbf{x} \in G$ peut être caractérisé par ses coordonnées (x, y, z) telles que :

$$\mathbf{x} = x.\mathbf{X} + y.\mathbf{Y} + z.\mathbf{Z}$$

où $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ désigne un repère orthonormé direct de l'espace géologique. On notera aussi, plus simplement, par \mathbf{x} le vecteur colonne contenant les coordonnées du point \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

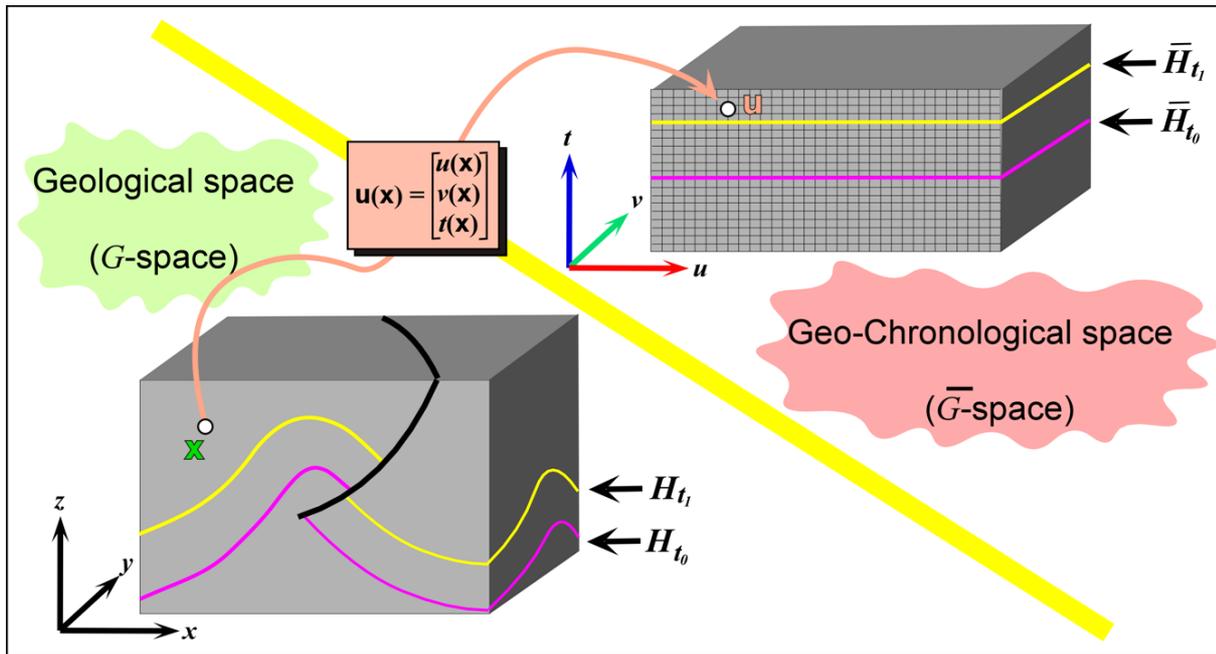


FIG. 2.1 : Schéma de principe de l'espace GeoChron. En bas, un modèle géologique G , avec des horizons H_{t_0} et H_{t_1} plissés et faillés. En haut, les images de ces horizons dans l'espace paramétrique \bar{G} sont des surfaces planes non faillées ([Mallet, 2004]).

²Pour *Geological Space*.

Les *temps* géologiques

On suppose que les terrains contenus dans le domaine d'étude G se sont formés de la manière suivante :

- Au temps géologique t , les sédiments, quelle que soit leur origine ou leur nature, se sont déposés sur tout ou partie d'un plan \overline{H}_t , représentant la surface de la Terre ou le fond des océans. La notation \overline{H}_t est utilisée pour signifier que cet horizon est un plan horizontal.
- Suite à des événements tectoniques postérieurs à t , le plan horizontal \overline{H}_t est progressivement, en une ou plusieurs étapes, transformé en une surface H_t telle qu'elle est observable actuellement dans le sous-sol. Cet horizon peut être plissé et/ou faillé, suivant son histoire géologique. Cette définition implique que tout horizon s'est formé de manière isochrone.

Étant donné un jeu de données initiales (cube d'attributs sismiques ou autres mesures géophysiques, puits, observations de surface...) il est possible de construire un modèle d'un ensemble fini de surfaces $\{H_{t_0}, H_{t_1}, \dots, H_{t_n}\}$ classées par ordre chronologique :

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n$$

Par convention, on définit t comme croissant des horizons les plus anciens vers les horizons les plus jeunes, de manière à ce que l'axe des temps soit généralement dans le même sens que l'axe \mathbf{Z} de G . En conséquence, ce *temps* est l'opposé de l'âge géologique des terrains :

$$t_i < t_j \iff H_{t_i} \text{ est plus ancien que } H_{t_j}$$

D'autre part, en géophysique il est souvent d'usage de modéliser l'axe vertical de l'espace des mesures actuel par un temps : il s'agit dans ce cas du temps nécessaire aux mesures pour parcourir le chemin de l'émetteur (par exemple, un vibreur) jusqu'au point du volume, puis à nouveau jusqu'au récepteur (par exemple, un géophone)³.

Le paramètre *temps* de la paramétrisation GeoChron est totalement indépendant de cette notation, puisqu'il s'agit dans un cas de l'opposé de l'âge des terrains et dans l'autre d'une manière de représenter la position géométrique des terrains dans le sous-sol. Le modèle GeoChron s'applique donc indépendamment de la nature de l'axe vertical du modèle, distance ou temps de mesure. Pour éviter toute confusion, nous n'utiliserons que la notation \mathbf{Z} pour désigner l'axe vertical de l'espace géologique et le paramètre temporel du modèle GeoChron sera toujours noté *temps* ou t .

Enfin, deux remarques peuvent être faites concernant les hypothèses fondamentales sous-tendant les principes de formation des terrains évoqués plus haut :

- On suppose initialement que toutes les particules d'un même âge géologique se sont déposées sur un plan horizontal. Cette hypothèse est fautive dans certains cas, par exemple lorsqu'on considère des dépôts sur des marges continentales, dont la pente peut être assez forte, ou encore dans le cadre de tectoniques syn-sédimentaires (plis par propagation, *rollovers*, etc.) Cependant, l'hypothèse principale de la modélisation de propriété est que, dans l'espace où a lieu la modélisation, des particules sur

³En sismique, on parle aussi de *Two Way Time*, ou TWT.

un même plan horizontal sont plus fortement corrélées à faible distance que des particules sur des plans différents. Dans le cas de paléo-géographies non planes, cette hypothèse est vraie pour des particules qui se sont formées dans le même intervalle de temps, donc qui sont le long d'un même paléo-horizon \overline{H}_t , et non pas pour des particules sur un même plan horizontal. D'autre part, on verra qu'il existe des facteurs permettant de prendre en compte l'épaisseur réelle et donc la géométrie des dépôts, dans le modèle (paragraphe 2.2.1). Par conséquent, le modèle GeoChron peut être utilisé même si les géométries réelles de dépôt ne sont pas horizontales.

- L'autre hypothèse du modèle est que les horizons observés actuellement dans le sous-sol sont bien des surfaces isochrones. À l'échelle régionale, cette hypothèse est vraie (c'est une des définitions des couches géologiques, voir [Cojan et Renard, 1997]) mais à une échelle plus fine, comme celle d'un réservoir, elle ne l'est plus forcément. En effet, les réflecteurs majeurs apparaissant lors d'une prospection sismique reflètent des changements dans les faciès – ou le contenu liquide – du sous-sol, qui peuvent varier au sein d'une même couche (figure 2.2). Il importe donc d'être attentif à la nature des horizons utilisés pour construire un modèle GeoChron, qui doivent impérativement être des surfaces isochrones.

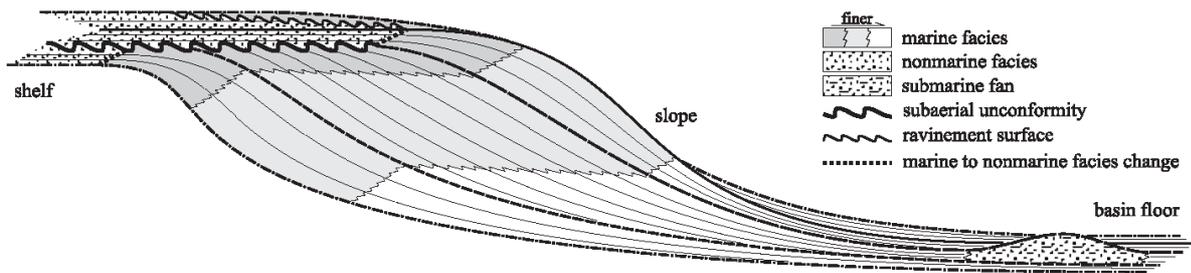


FIG. 2.2 : Variation latérale de faciès au sein d'une même couche le long d'une marge de bassin. Pendant la même durée, différents faciès (en nuances de gris) se sont déposés suivant la distalité, entre deux limites de séquences majeures. Les limites de faciès sont ici très différentes des surfaces isochrones (les limites de séquence). Noter aussi que l'épaisseur déposée varie fortement suivant les endroits au sein d'une même séquence ([Catuneanu et al., 1998]).

Enfin, on peut remarquer que le modèle n'impose rien d'autre que la relation d'ordre sur les $\{t_i\}$. Si les âges géologiques des couches sont connus, ils peuvent être utilisés, mais si ce n'est pas le cas, n'importe quelles valeurs, même arbitraires, peuvent être affectées à chaque horizon, sans que cela n'altère la qualité théorique du modèle. Le paragraphe 3.1.1 discute de contraintes numériques lors de l'implémentation informatique.

Les coordonnées paléo-géographiques

À chaque instant t , c'est-à-dire le long de chaque surface \overline{H}_t , nous cherchons à construire une carte du sous-sol permettant de modéliser la distribution des particules dans le volume d'étude. Pour cela, deux hypothèses sont faites :

- D'une part, on suppose que les propriétés pétrophysiques actuelles d'une particule de sédiments sont uniquement fonction de leur position au moment du dépôt, dans leur environnement sédimentaire. Cela suppose d'une part que les événements tectoniques (plissement et rupture) n'affectent pas les propriétés pétrophysiques, ce dont nous avons déjà discuté dans le premier chapitre (paragraphe 1.1.4), et d'autre part que les phénomènes de diagénèse sont négligeables ou ont affecté la zone d'étude avant toute déformation. Dans le cas contraire, le modèle de propriété final devra être corrigé de ces influences (voir paragraphe 5.1).
- D'autre part, dans le cas d'érosions, on considère que toute particule déposée à un temps $t - \Delta t$, puis érodée, transportée et redéposée à un temps t est une nouvelle particule. De plus, cette particule laisse un « vide » dans l'image paramétrique de l'horizon $\overline{H}_{t-\Delta t}$ dont elle est issue.

Ces hypothèses impliquent qu'il est important, pour obtenir un modèle de propriété cohérent, de reconstruire précisément non seulement la position verticale de chaque point sur la pile de paléo-horizons, mais aussi sa position horizontale sur un paléo-horizon.

Une analogie de ce modèle est figurée par la figure 2.3 : on suppose qu'un satellite a pu rester géostationnaire au-dessus de la zone modélisée (indépendamment de tout déplacement à plus grande échelle du domaine d'étude) et qu'un appareil photo embarqué a pris une succession d'images à des intervalles de temps très courts δt et a empilé ces images les unes au-dessus des autres. On attache un repère orthonormé direct $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{T})$ à cet empilement, \mathbf{T} étant perpendiculaire à la surface de la Terre.

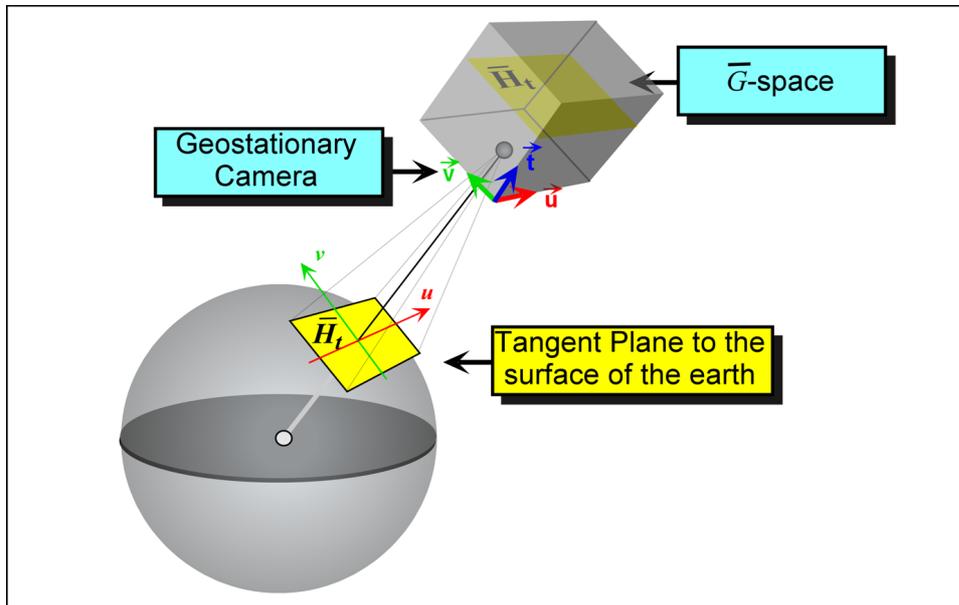


FIG. 2.3 : L'espace paramétrique \overline{G} vu comme un empilement continu d'images de l'espace de dépôt, prises depuis un satellite géostationnaire au-dessus de la zone étudiée, au cours du temps ([Mallet, 2004]).

Chaque plan \overline{H}_t est donc orthogonal à \mathbf{T} et parallèle aux vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{V} , qui peuvent donc être utilisés comme un repère de \overline{H}_t . Par conséquent, étant donné une origine quel-

conque \mathbf{p}_0 , tout point $\mathbf{p} \in \overline{H}_t$ peut être caractérisé par ses coordonnées (u, v) :

$$\mathbf{p} \in \overline{H}_t \iff \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + u.\mathbf{U} + v.\mathbf{V}$$

Comme les coordonnées (u, v) d'un point sur un paléo-horizon \overline{H}_t permettent de localiser de manière unique n'importe quel point, quel que soit t , ces coordonnées sont appelées *coordonnées paléo-géographiques*.

L'espace paramétrique \overline{G}

On peut imaginer d'empiler de manière continue les images des paléo-horizons $\{\overline{H}_{t_0}, \overline{H}_{t_1}, \dots\}$ au cours du temps géologique dans une « boîte » dont les axes sont définis par les trois vecteurs \mathbf{U} , \mathbf{V} et \mathbf{T} , en respectant les règles suivantes :

1. chaque image \overline{H}_t est orthogonale au vecteur \mathbf{T} et coupe l'axe des *temps* géologiques à l'abscisse t ;
2. les coordonnées paléo-géographiques (u, v) attachées à chaque paléo-horizon \overline{H}_t sont parallèles à \mathbf{U} et \mathbf{V} .

L'espace paramétrique ainsi défini autour du repère $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{T})$ est appelé *espace géochronologique* ou \overline{G} -Space⁴. Dans cet espace, la position de n'importe quelle particule de sédiment déposée au temps t et aux coordonnées paléo-géographiques (u, v) , notée \mathbf{u} , s'écrit comme :

$$\mathbf{u} = u.\mathbf{U} + v.\mathbf{V} + t.\mathbf{T}$$

Par la suite, nous noterons \mathbf{u} le vecteur dont les composantes sont les coordonnées (u, v, t) de ce point :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ t \end{bmatrix}$$

L'association entre les particules \mathbf{x} de l'espace géologique et leurs coordonnées (u, v, t) dans l'espace paramétrique étant unique, on peut définir, pour tout point $\mathbf{x} \in G$, trois fonctions $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ (figure 2.1) transformant \mathbf{x} en un point $\mathbf{u} = (u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x})) \in \overline{G}$. On définit alors une *fonction de paramétrisation*, ou \overline{G} -paramétrisation $\mathbf{u}(\mathbf{x})$:

$$\forall \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in G \quad \xrightarrow{\mathbf{u}} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ t(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \in \overline{G}$$

Remarquons qu'il existe une infinité de fonctions de paramétrisation possibles, chacune pouvant être déduite des autres par un changement d'échelle du *temps* géologique (puisque les valeurs de celui-ci sont arbitraires) et/ou une combinaison de rotation et de translation des coordonnées paléo-géographiques. Ainsi, étant donné une paramétrisation

⁴Pour *Geo-Chronological Space*.

initiale $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, on obtient une autre paramétrisation $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u'(\mathbf{x}) \\ v'(\mathbf{x}) \\ t'(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \\ F(t(\mathbf{x})) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_v \\ \Delta_t \end{bmatrix}$$

où $F(t)$ est une fonction monotone croissante quelconque, α un angle de rotation et Δ_u , Δ_v et Δ_t trois constantes de translation.

Il est à noter que la fonction de paramétrisation n'est pas une bijection, mais uniquement une injection (figure 2.4) :

- tout point de G a une image par $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ dans \overline{G} ;
- mais, à cause des érosions ou des lacunes de sédimentation, certains points de \overline{G} n'ont pas d'antécédent dans G .

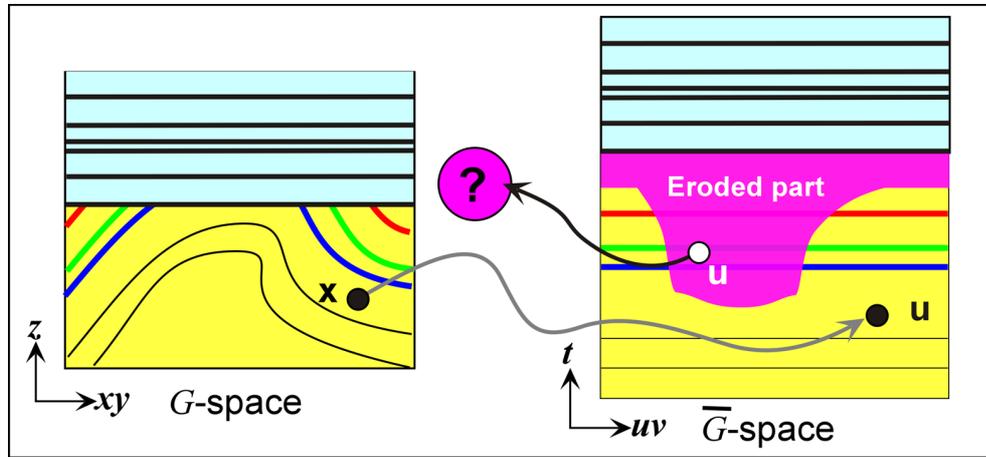


FIG. 2.4 : Coupe verticale illustrant la correspondance entre G et \overline{G} , en présence de zones d'érosion. Certains points de l'espace paramétrique n'ont pas de correspondance dans l'espace géologique initial ([Mallet, 2004]).

Pour faciliter les formulations mathématiques, on définit un sous-espace \overline{G}_0 de \overline{G} , appelé *domaine paramétrique*, comme l'ensemble des points de \overline{G} qui ont un antécédent dans G :

$$\mathbf{u}^* \in \overline{G}_0 \iff \exists \mathbf{x}^* \in G : \mathbf{u}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{u}^* \in \overline{G}$$

Par conséquent, la fonction de paramétrisation $\mathbf{u}(\mathbf{x}^*)$ est une bijection de G vers \overline{G}_0 . En termes géologiques, \overline{G}_0 correspond aux points de l'espace paramétrique de dépôt qui ont été préservés jusqu'au temps présent. Si on se réfère aux notions définies par Wheeler [Wheeler, 1958], le domaine paramétrique \overline{G}_0 correspond à la notion d'*holostrome*⁵.

La fonction de paramétrisation étant une bijection, il est alors possible de définir sa fonction inverse $\mathbf{x}(\mathbf{u})$, pour tout point $\mathbf{u} \in \overline{G}_0$:

$$\mathbf{u}^* \in \overline{G}_0 \xrightarrow{\mathbf{x}} \mathbf{x}(\mathbf{u}^*) \in G : \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{u}^*)) = \mathbf{u}^*$$

⁵Du grec *holo*, totalité, et *strom*, couche.

La fonction $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ est appelée *représentation paramétrique* de l'espace géologique G associé à la fonction de paramétrisation $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. On notera parfois $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ comme une fonction des trois composantes (u, v, t) de \mathbf{u} , sous la forme $\mathbf{x}(u, v, t)$.

Enfin, remarquons un certain nombre de correspondances entre des valeurs particulières de la fonction de paramétrisation et des contextes géologiques (figure 2.5) :

- si t est fixe pendant que (u, v) varie, alors le point $\mathbf{x}(u, v, t)$ se déplace sur l'horizon H_t ;
- si (v, t) (respectivement (u, t)) sont fixes pendant que u (resp. v) varie, alors le point $\mathbf{x}(u, v, t)$ se déplace le long d'une courbe appelée *ligne- u* (resp. *ligne- v*), appartenant à H_t ;
- enfin, si (u, v) sont fixes pendant que t varie, alors $\mathbf{x}(u, v, t)$ se déplace le long d'une courbe appelée *ligne- t* qui coupe la pile d'horizons.

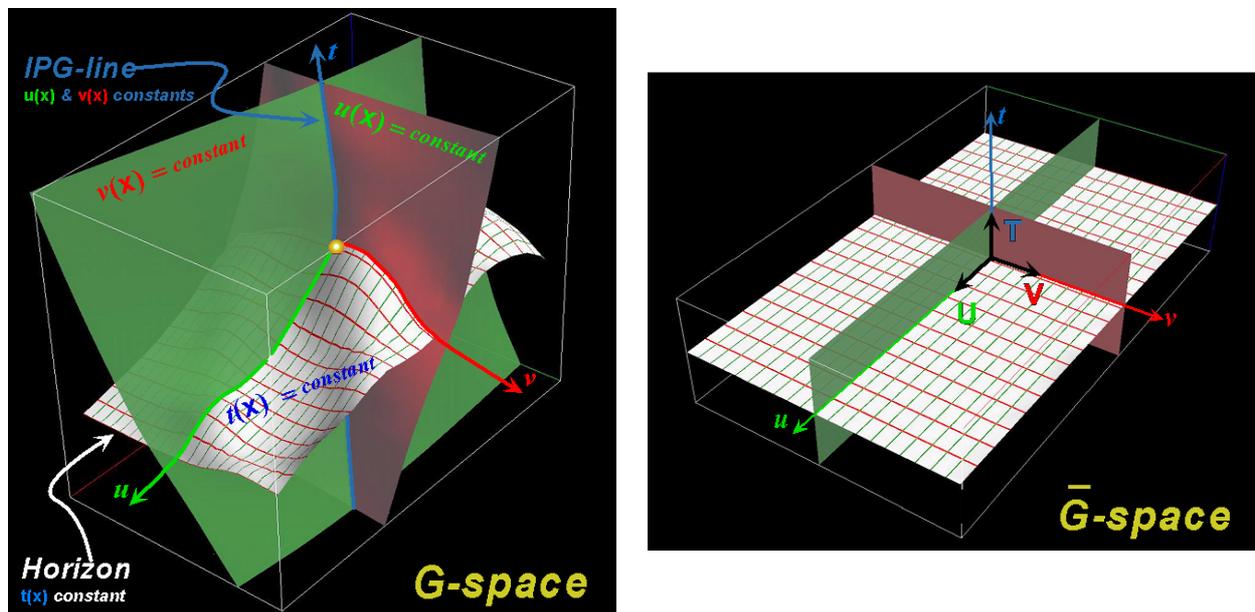


FIG. 2.5 : Lignes de paramétrisation u , v et t dans l'espace géologique. L'intersection dans l'espace géologique (à gauche) de trois surfaces d'isovaleurs de $u(\mathbf{x})$ (en rouge), $v(\mathbf{x})$ (en vert) et $t(\mathbf{x})$ (en blanc, les lignes rouges et vertes figurant les traces de surfaces d'isovaleurs de u et de v) définit des lignes particulières appelées lignes- u , lignes- v et lignes- t ou lignes iso-paléo-géographiques. Dans l'espace paramétrique (à droite), ces surfaces sont planes et ces lignes sont droites, et s'intersectent à angle droit.

Les lignes- t sont particulièrement intéressantes : en effet, leurs images dans l'espace paramétrique sont des lignes verticales et elles représentent des particules qui se sont déposées aux mêmes coordonnées paléo-géographiques (u, v) au cours du temps. En conséquence, par la suite, ces lignes seront appelées *lignes iso-paléo-géographiques*, ou *lignes IPG*. Nous verrons qu'elles jouent un grand rôle dans la construction et la modification d'une paramétrisation (paragraphe 3.2).

2.1.2 Géométrie différentielle des coordonnées paramétriques

Nous allons maintenant donner quelques caractéristiques mathématiques associées à des repères particuliers des espaces géologiques et paramétriques. Les relations que nous allons établir permettront de déduire diverses contraintes utilisables lors de la construction d'une paramétrisation (chapitre suivant) ou lors de son utilisation dans certains contextes, en particulier l'étude du tenseur de déformation (paragraphe 5.2).

Les caractérisations que nous allons développer se basent essentiellement sur les principes de géométrie différentielle. On pourra se reporter à [Mallet, 2002], par exemple, pour de plus amples détails sur les formules.

Repère paramétrique

La figure 2.6 indique comment, en chaque point $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v, t)$ de l'espace géologique G , la représentation paramétrique $\mathbf{x}(u, v, t)$ génère un système de coordonnées curvilinéaires le long d'une ligne- u , d'une ligne- v et d'une ligne- t , suivant trois vecteurs notés \mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v et \mathbf{x}_t . Ces vecteurs sont définis comme les dérivées partielles de $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ à u , v ou t constant :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(\mathbf{x}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}(u, v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}))}{\partial u} \right|_{u=u(\mathbf{x})} \\ \mathbf{x}_v(\mathbf{x}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}(u(\mathbf{x}), v, t(\mathbf{x}))}{\partial v} \right|_{v=v(\mathbf{x})} \\ \mathbf{x}_t(\mathbf{x}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}(u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), t)}{\partial t} \right|_{t=t(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ces vecteurs définissent un repère particulier qui sera appelé *repère paramétrique* (ou *G-frame* en anglais).

Nous allons maintenant montrer comment les gradients des fonctions $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ permettent de calculer ces vecteurs en tout point de l'espace géologique. Pour cela, considérons, par exemple, le vecteur $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ en un point $\mathbf{x} \in G$ et appelons (u^*, v^*) les valeurs de $u(\mathbf{x})$ et $v(\mathbf{x})$ en ce point. La ligne- t passant par \mathbf{x} et son vecteur tangent $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ sont parallèles à l'intersection des plans tangents en \mathbf{x} aux surfaces d'isovaleurs u^* de $u(\mathbf{x})$ et v^* de $v(\mathbf{x})$.

Ces deux plans tangents aux surfaces d'isovaleurs ont pour vecteur normal, respectivement, $\mathbf{grad} u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{grad} v(\mathbf{x})$. Le vecteur $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ est donc colinéaire au produit vectoriel de ces deux gradients :

$$\mathbf{x}_t(\mathbf{x}) = \varepsilon \cdot \|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\| \cdot \frac{\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})}{\|\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})\|}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$, suivant l'orientation de la ligne- t .

La norme $\|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\|$ peut être déduite des coordonnées curvilinéaires le long de la ligne- t . En effet, par définition, si on note s l'abscisse curvilinéaire le long de cette ligne, on a :

$$\|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

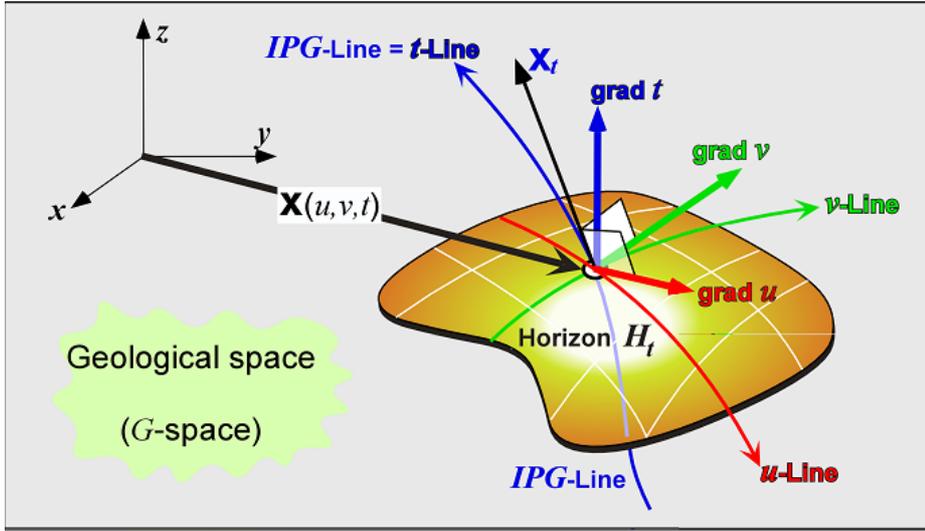


FIG. 2.6 : Repère paramétrique $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$ de l'espace géologique. Les vecteurs \mathbf{x}_u et \mathbf{x}_v sont tangents à l'horizon H_t au point \mathbf{x} et chacun des trois vecteurs est tangent à la ligne d'isovaleur correspondante ([Mallet, 2004]).

Considérons un vecteur unitaire $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_t(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\|$, tangent à la ligne- t en \mathbf{x} . Un résultat classique de géométrie différentielle (voir [Mallet, 2002]) nous indique que la dérivée de t le long de la ligne est telle que :

$$\frac{dt}{ds} = \mathbf{d}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x})$$

En remplaçant $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ par son expression en fonction des gradients de $u(\mathbf{x})$ et de $v(\mathbf{x})$, on obtient :

$$\frac{dt}{ds} = \varepsilon \cdot \frac{\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})}{\|\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})\|} \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x})$$

Par conséquent, en inversant cette relation, on obtient les expressions suivantes de la norme $\|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\|$ (la norme étant positive, le coefficient ε disparaît), puis de $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_t(\mathbf{x})\| &= \left| \frac{ds}{dt} \right| = \frac{\|\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})\|}{(\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x})} \\ \mathbf{x}_t(\mathbf{x}) &= \varepsilon \cdot \frac{\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x})} \end{aligned}$$

En pratique, on choisira toujours $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ orienté dans la même direction que $\mathbf{grad} t(\mathbf{x})$, ce qui revient à dire que ε doit être choisi de telle sorte que :

$$\mathbf{x}_t(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x}) > 0$$

soit $\varepsilon = +1$.

Par permutation circulaire des (u, v, t) , on obtient de manière similaire les expressions de $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} t(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x})} \\ \mathbf{x}_v(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{grad} t(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} u(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x})} \\ \mathbf{x}_t(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x})}\end{aligned}\tag{2.2}$$

On utilisera par la suite le *tenseur métrique* $g(\mathbf{x})$, classiquement défini ([Sédov, 1975], [Mallet, 2002]) comme le produit des vecteurs $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_u\|^2 & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u & \|\mathbf{x}_v\|^2 & \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_t \cdot \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_t \cdot \mathbf{x}_v & \|\mathbf{x}_t\|^2 \end{bmatrix}\tag{2.3}$$

Ce tenseur métrique est caractéristique (voir [Sédov, 1975], [Sokolnikoff, 1964]) des propriétés métriques de l'espace défini par ces vecteurs, comme les longueurs, les aires, les volumes, les angles, etc. Il sert en particulier à estimer le tenseur de déformation (paragraphe 5.2).

Si on se réfère aux notations de géométrie différentielle (voir par exemple à ce sujet [Sédov, 1975], p. 61), on observe que $(\mathbf{grad} u, \mathbf{grad} v, \mathbf{grad} t)$ est le repère *contravariant* associé au repère *covariant* $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$. Or les vecteurs de base covariants \mathbf{v}_i correspondant aux vecteurs de base contravariants \mathbf{v}^j par l'intermédiaire du tenseur métrique g , on en déduit l'expression inverse :

$$\mathbf{v}^j = g^{ij} \cdot \mathbf{v}_i \quad \iff \quad \mathbf{v}_i = g_{ij}^{-1} \cdot \mathbf{v}^j$$

Le tenseur métrique g exprimant la transformation du repère covariant en un repère contravariant, étant formé par les produits des vecteurs du repère covariant $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$, son inverse g^{-1} , exprimant la transformation du repère contravariant en un repère covariant, est formé par le produit des vecteurs du repère contravariant $(\mathbf{grad} u, \mathbf{grad} v, \mathbf{grad} t)$:

$$g^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \|\mathbf{grad} u\|^2 & \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v & \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} t \\ \mathbf{grad} v \cdot \mathbf{grad} u & \|\mathbf{grad} v\|^2 & \mathbf{grad} v \cdot \mathbf{grad} t \\ \mathbf{grad} t \cdot \mathbf{grad} u & \mathbf{grad} t \cdot \mathbf{grad} v & \|\mathbf{grad} t\|^2 \end{bmatrix}\tag{2.4}$$

De plus, le déterminant de $g^{-1}(\mathbf{x})$ peut aussi s'exprimer en fonction de ces gradients :

$$\det g^{-1}(\mathbf{x}) = ((\mathbf{grad} u \times \mathbf{grad} v) \cdot \mathbf{grad} t)^2$$

Enfin, pour éviter toute confusion, nous insistons sur le fait que ni le repère $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$, ni le repère $(\mathbf{grad} u, \mathbf{grad} v, \mathbf{grad} t)$, ne sont orthogonaux. De plus, seules les relations de l'équation 2.3 relient aisément ces deux repères.

Vecteur normal unitaire $\mathbf{N}(\mathbf{x})$

On désigne par $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ le vecteur normal à l'horizon H_t , au point \mathbf{x} . Ce vecteur est, par définition, parallèle au vecteur $\mathbf{grad} t(\mathbf{x})$ et, si on décide qu'il pointe vers les terrains les plus jeunes, s'exprime comme :

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{grad} t(\mathbf{x})}{\|\mathbf{grad} t(\mathbf{x})\|}$$

Comme l'illustre la figure 2.6 et comme indiqué par l'équation 2.3, les vecteurs $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ sont tangents à l'horizon H_t et sont donc orthogonaux à $\mathbf{N}(\mathbf{x})$. $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ peut alors s'écrire aussi comme :

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{x})\|}$$

Cette seconde définition peut toutefois résulter en une orientation de $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ différente de celle de la première. Pour éviter cela, nous prendrons les fonctions $u(\mathbf{x})$ et $v(\mathbf{x})$ telles que :

$$(\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in G$$

Cette relation peut se transformer, en revenant aux définitions de $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$, et en notant que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -((\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \times \mathbf{x}_v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x}) > 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\mathbf{grad} v \times \mathbf{grad} t}{(\mathbf{grad} u \times \mathbf{grad} v) \cdot \mathbf{grad} t} \times \frac{\mathbf{grad} t \times \mathbf{grad} u}{(\mathbf{grad} u \times \mathbf{grad} v) \cdot \mathbf{grad} t} \right) \cdot \mathbf{grad} t > 0 \\ \Leftrightarrow & \left[- \left(\left(\frac{\mathbf{grad} v \times \mathbf{grad} u}{(\mathbf{grad} u \times \mathbf{grad} v) \cdot \mathbf{grad} t} \right) \cdot \mathbf{grad} t \right) \cdot \mathbf{grad} t \right] \cdot \mathbf{grad} t > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\mathbf{grad} t}{(\mathbf{grad} u \times \mathbf{grad} v) \cdot \mathbf{grad} t} \cdot \mathbf{grad} t > 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{\|\mathbf{grad} t\|^2}{(\mathbf{grad} u \times \mathbf{grad} v) \cdot \mathbf{grad} t} > 0 \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{grad} u \times \mathbf{grad} v) \cdot \mathbf{grad} t > 0 \end{aligned}$$

(car $\|\mathbf{grad} t\|^2$ est forcément positif).

On peut noter qu'honorer cette condition implique que le repère formé par les vecteurs $(\mathbf{grad} u, \mathbf{grad} v, \mathbf{grad} t)$ est direct. Par la suite, on considérera que cette condition est toujours vérifiée.

Image du repère $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$ dans l'espace paramétrique \overline{G}

D'après la définition 2.2 et d'après la définition de la dérivée d'une fonction en un point, le vecteur $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ s'exprime comme :

$$\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(u(\mathbf{x}) + \Delta u, v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x})) - \mathbf{x}(u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x}), t(\mathbf{x}))}{\Delta u}$$

Par conséquent, l'image de $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ dans l'espace paramétrique \overline{G} est un vecteur $\overline{\mathbf{x}_u(\mathbf{x})}$ tel que :

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{x}_u(\mathbf{x})} &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) + \Delta u \\ v(\mathbf{x}) \\ t(\mathbf{x}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u(\mathbf{x}) \\ v(\mathbf{x}) \\ t(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta u} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\end{aligned}$$

En d'autres termes, l'image dans l'espace paramétrique \overline{G} du vecteur $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ est, quel que soit \mathbf{x} , le vecteur unitaire \mathbf{U} de la base de \overline{G} . Par le même raisonnement, on obtient les images de $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ et de $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$:

$$\forall \mathbf{x} \in G : \begin{cases} \overline{\mathbf{x}_u(\mathbf{x})} = \mathbf{U} \\ \overline{\mathbf{x}_v(\mathbf{x})} = \mathbf{V} \\ \overline{\mathbf{x}_t(\mathbf{x})} = \mathbf{T} \end{cases} \quad (2.5)$$

Le repère $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{T})$ est donc l'image dans l'espace paramétrique \overline{G} du repère $(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_t)$ de l'espace G .

On peut en déduire la transformation d'un vecteur élémentaire $d\mathbf{W}(\mathbf{x})$ de l'espace géologique dans l'espace \overline{G} :

$$\begin{aligned}d\mathbf{W}(\mathbf{x}) &= du.\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) + dv.\mathbf{x}_v(\mathbf{x}) + dt.\mathbf{x}_t(\mathbf{x}) \\ \iff \overline{d\mathbf{W}(\mathbf{x})} &= du.\mathbf{U} + dv.\mathbf{V} + dt.\mathbf{T}\end{aligned}$$

les coefficients (du, dv, dt) s'expriment comme :

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dt \end{bmatrix} = g^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \begin{bmatrix} d\mathbf{W}(\mathbf{x}).\mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \\ d\mathbf{W}(\mathbf{x}).\mathbf{x}_v(\mathbf{x}) \\ d\mathbf{W}(\mathbf{x}).\mathbf{x}_t(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

2.2 Aspects sédimentologiques de l'espace paramétrique

Le paragraphe précédente établissait des correspondances entre des points ou des vecteurs de l'espace géologique et leurs images dans l'espace paramétrique. Nous allons maintenant nous intéresser à la formulation mathématique de notions plus directement géologiques.

2.2.1 Vitesse de sédimentation instantanée

Comme l'axe vertical de l'espace paramétrique \bar{G} est un *temps*, il est logique d'observer la correspondance entre ce *temps* et les épaisseurs visibles aujourd'hui, suivant l'axe \mathbf{Z} de l'espace géologique. Pour cela, nous utiliserons la notion de *vitesse de sédimentation instantanée*.

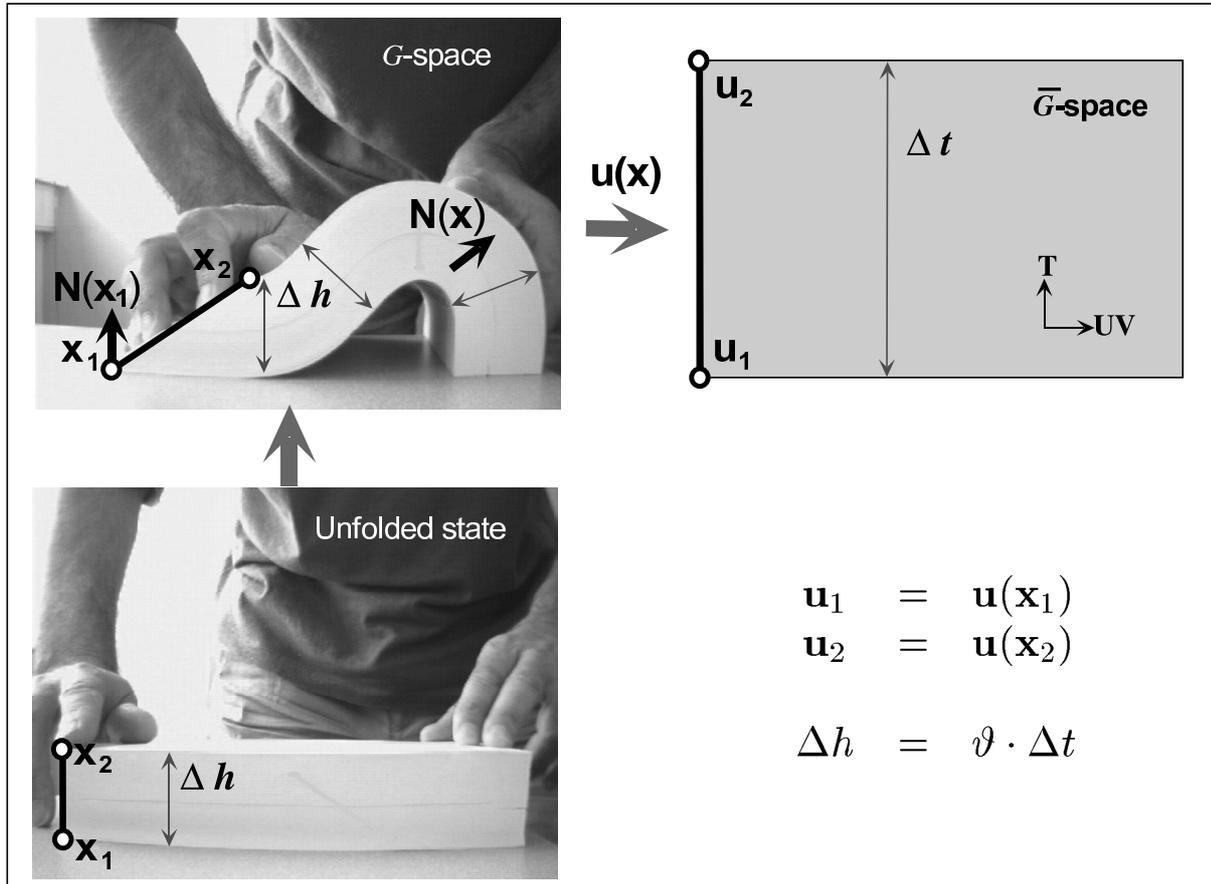


FIG. 2.7 : Un livre plié vu comme un analogue à la déformation d'une couche géologique, permettant d'établir la correspondance entre une couche réelle (en haut à gauche) et l'intervalle de temps correspondant dans l'espace paramétrique (en haut à droite). Le style de déformation est ici du flexural slip (voir plus loin), qui met en évidence la différence entre l'épaisseur réelle Δh de la couche, constante quel que soit l'état, et la longueur suivant une ligne- t reliant \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . Ces deux longueurs sont les mêmes dans l'état déplié (en bas à gauche) ([Mallet, 2004]).

La figure 2.7 présente un livre plissé, comme un analogue d'une couche géologique d'épaisseur initiale constante Δh déformée. On notera $H_{t-\Delta t}$ le mur de cette couche et H_t son toit. On suppose qu'il n'y a pas eu de compaction, ni d'autre transformation que cette déformation.

Que la couche soit déformée ou non, son épaisseur Δh est la longueur d'un segment orthogonal à $H_{t-\Delta t}$ et à H_t . Cette épaisseur est égale à la somme de l'épaisseur de chacune des couches élémentaires (c'est-à-dire des pages du livre, dans l'exemple de la figure 2.7).

Par conséquent, si on suppose qu'il n'y a pas eu d'autres déformations que du *flexural slip*, c'est-à-dire que les couches élémentaires ont pu librement glisser les unes sur les autres, l'épaisseur d'une couche est un invariant au cours de l'histoire géologique, quel que soit le système de coordonnées paramétriques (u, v, t) .

D'autre part, le gradient du *temps* géologique au point $\mathbf{x} \in H_t$ est un vecteur de l'espace géologique tel que :

$$\mathbf{grad} t(\mathbf{x}) \simeq \frac{\Delta t}{\Delta h} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})$$

où $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ est le vecteur normal défini dans le paragraphe précédent.

Nous proposons de définir une *vitesse de sédimentation instantanée* $\vartheta(\mathbf{x})$ ou encore *taux de sédimentation instantané*, comme :

$$\vartheta(\mathbf{x}) \simeq \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

Plus globalement, si $\Delta t \rightarrow 0$ (ou $\Delta h \rightarrow 0$), la vitesse de sédimentation instantanée devient :

$$\vartheta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{grad} t(\mathbf{x})\|}$$

Inversement, le gradient de $t(\mathbf{x})$ s'exprime :

$$\mathbf{grad} t(\mathbf{x}) = \frac{1}{\vartheta(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})$$

La fonction ainsi définie n'est cependant qu'une vitesse de sédimentation « apparente », dans le sens où elle n'est vraie que si, d'une part, il n'y a pas eu de compaction au cours de l'histoire géologique des terrains et d'autre part les *temps* affectés à chaque horizon correspondent aux vrais âges géologiques.

Si on considère que la compaction a agi sur les terrains en transformant une colonne de sédiments d'épaisseur initiale $\Delta H(\mathbf{x})$ en une colonne d'épaisseur $\Delta h(\mathbf{x})$ observée aujourd'hui, selon un coefficient de compaction $\phi(\mathbf{x})$:

$$\Delta h(\mathbf{x}) = (1 - \phi(\mathbf{x})) \cdot \Delta H(\mathbf{x}) , \quad \text{avec} : 0 \leq \phi(\mathbf{x}) < 1$$

alors la vitesse de sédimentation instantanée peut être remplacée par une *vitesse de sédimentation décompactée instantanée* $\vartheta_\phi(\mathbf{x})$:

$$\vartheta_\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 - \phi(\mathbf{x})} \cdot \vartheta(\mathbf{x})$$

Le coefficient de compaction $\phi(\mathbf{x})$ n'est généralement pas constant sur le volume étudié, ses valeurs dépendant de la nature des sédiments au point \mathbf{x} , ainsi que de leur parcours au cours du temps.

Conversion âge-épaisseur

La vitesse de sédimentation instantanée permet de mettre en correspondance une épaisseur réelle $\Delta h(\mathbf{x})$ observée actuellement au point \mathbf{x} avec un intervalle de temps Δt pendant lequel elle s'est formée :

$$\Delta h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{x}) \cdot \Delta t$$

ou encore, en prenant en compte la compaction $\phi(\mathbf{x})$, une épaisseur décompactée $\Delta h_\phi(\mathbf{x})$:

$$\Delta h_\phi(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\vartheta}_\phi(\mathbf{x}) \cdot \Delta t$$

Inversement, tout corps sédimentaire observé dans l'espace paramétrique peut être relié à une épaisseur réelle :

$$\Delta t = \frac{\Delta h_\phi(\mathbf{x})}{\boldsymbol{\vartheta}_\phi(\mathbf{x})}$$

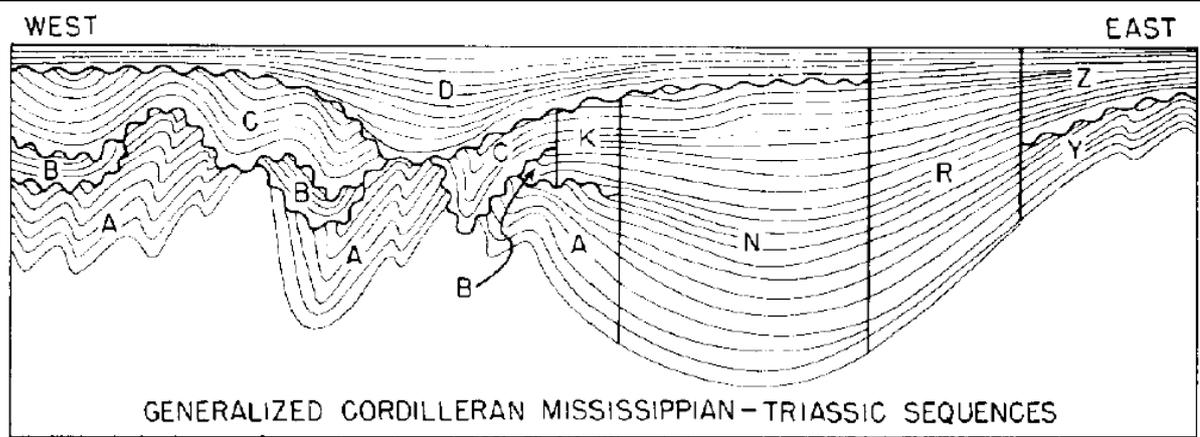
Cependant, il faut remarquer que l'intervalle de *temps* ainsi défini ne correspond pas strictement au temps mis par l'objet considéré pour se former, mais plutôt à l'intervalle de temps entre la formation de la base de l'objet et la formation de la base de l'objet juste au-dessus, en intégrant les éventuelles étapes de non dépôt.

2.2.2 Correspondance avec les diagrammes de Wheeler

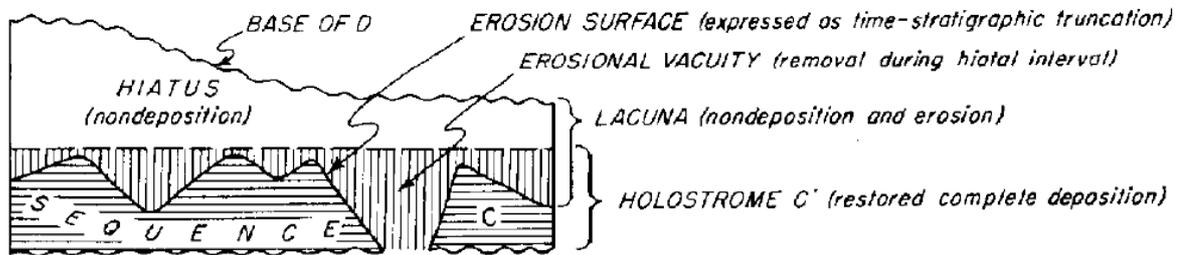
Le modèle GeoChron a été inspiré par les concepts de *time stratigraphy* introduits par Wheeler ([Wheeler, 1958]) et peut être vu comme une formulation mathématique de ces concepts. Ainsi, la figure 2.8 présente un exemple de diagramme stratigraphique que l'on peut comparer avec celui de la figure 2.4 qui a servi à présenter le modèle GeoChron.

Le modèle GeoChron pourra donc servir comme outil pour d'autres applications, qu'il s'agisse simplement de vérifier l'interprétation sédimentologique qui a été faite ou de calculer des modèles stratigraphiques basés sur les environnements de dépôt et les principes de la stratigraphie séquentielle ([Vail *et al.*, 1977] ou encore [Catuneanu, 2002] pour une synthèse récente).

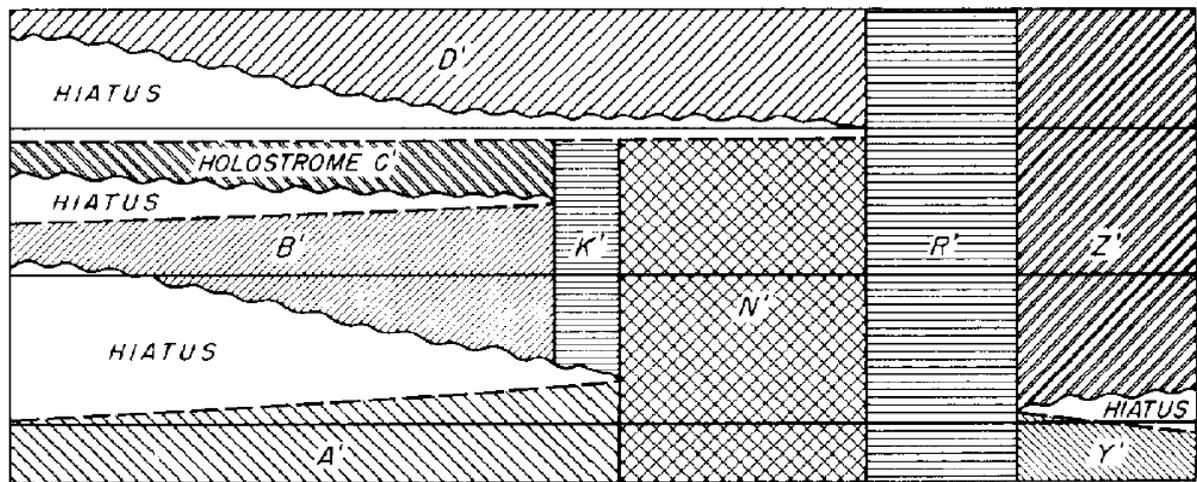
Cependant, en pratique, cette correspondance est fortement limitée. En effet, nous verrons (paragraphe 2.3.1 et 3.1.1) que le paramètre *temps* est construit par interpolation continue entre des valeurs de t fixées sur des horizons particuliers. En conséquence, il sera nécessaire d'adapter le modèle pour que la similitude avec les diagrammes de stratigraphie soit complète. Cet aspect sera développé dans le chapitre 5 (paragraphe 5.1.3).



2.



3.



4.

FIG. 2.8 : Diagramme de time stratigraphy ou de Wheeler ([Wheeler, 1958]). En haut, coupe simplifiée entre le Pacifique et les Montagnes Rocheuses, au 40^{ème} parallèle, montrant les principales séquences et inconformités (base du Mississippien supérieur et limite Trias-Jurassique). Au milieu, diagramme de time stratigraphy de la formation C, illustrant les principales composantes d'un diagramme de Wheeler. En bas, diagramme de Wheeler complet correspondant à la coupe, l'axe vertical du diagramme correspond à l'âge de dépôt des terrains et les différentes surfaces remarquables sont représentées sous forme de lignes horizontales, à temps constant. Noter la présence de zones de non dépôt (hiatus).

2.3 Comment construire une paramétrisation GeoChron ?

Nous avons présenté jusqu'à maintenant les bases mathématiques et géologiques du modèle GeoChron, une paramétrisation 3D de l'espace géologique. Nous n'avons cependant donné aucune indication sur la manière dont une telle paramétrisation peut être construite en pratique.

Ce paragraphe fournit quelques indices sur la construction, issus directement des mathématiques sous-jacentes. Les indications développées ici sont plus génériques que les méthodes détaillées dans le chapitre suivant : si d'autres méthodes de construction, totalement différentes de celles que nous proposerons, peuvent être envisagées, elles devront toutefois respecter les contraintes et principes qui sont présentés ici.

Dans un premier temps, quelques contraintes globales sur la paramétrisation sont détaillées, puis nous évoquons les problèmes liés au style de déformation subi par le volume d'étude, ainsi que la manière d'intégrer ce style dans le calcul d'une paramétrisation, sous forme de contraintes mathématiques.

Le chapitre suivant est entièrement consacré au problème de l'implémentation numérique de ces différentes contraintes et détaille comment obtenir réellement en pratique une paramétrisation GeoChron.

2.3.1 Contraintes génériques

Paramétrisation aux nœuds d'un maillage

Construire une paramétrisation GeoChron revient à calculer, en tout point $\mathbf{x} \in G$ de l'espace géologique, trois fonctions scalaires $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$. Ces fonctions peuvent être vues comme des « propriétés » du milieu au même titre que les propriétés pétrophysiques ou autres.

Cette définition ne donne aucune indication sur la nature du support utilisé pour les calculs, et on pourrait envisager de construire une telle paramétrisation sur un modèle continu. En pratique, nous avons vu dans le premier chapitre que les propriétés géologiques étaient généralement modélisées aux nœuds d'un maillage discret.

Dans ce cas, construire une paramétrisation revient à calculer la valeur des trois fonctions $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ à chacun des nœuds du maillage. La valeur de ces fonctions en un point qui n'est pas un nœud du maillage mais qui est plongé dans une des cellules, peut alors être obtenu par interpolation des valeurs aux sommets.

Le maillage choisi peut être indifféremment régulier ou non, structuré ou non. Dans le chapitre suivant (paragraphe 3.1.3), le choix du maillage le mieux adapté, dans notre contexte, à la construction d'un modèle GeoChron sera discuté.

Contrainte intrinsèque de continuité

Le modèle mathématique présenté dans ce chapitre suppose que les composantes $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ de $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ sont dérivables en tout point et donc sont aussi continues. Cette continuité doit donc apparaître dans la construction du modèle.

Cette continuité est toutefois obligatoirement interrompue au niveau des failles et des surfaces d'inconformité puisque, par définition, les terrains de part et d'autre ne se sont pas déposés au même moment, ni au même endroit (dans le cas des failles).

En conséquence, les méthodes de construction devront intégrer une contrainte assurant que les fonctions $u(\mathbf{x})$, $v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$ sont continues par morceaux et que leurs dérivées sont aussi continues. La question de la continuité au travers des failles, suivant le vecteur rejet, sera évoquée dans le chapitre 4.

Contraintes intrinsèques sur des lignes et surfaces particulières

Nous avons défini un certain nombre de surfaces et de lignes particulières dans le cadre d'une paramétrisation GeoChron. On distingue spécialement les horizons H_t , c'est-à-dire des surfaces d'isovaleur de t , et les lignes- t ou lignes IPG, le long desquelles (u, v) restent constants et seul t varie. Ces objets peuvent servir à définir des contraintes utilisables en terme de construction.

Ainsi, le long d'une ligne IPG L , les relations suivantes ou *contraintes intrinsèques IPG* doivent être respectées :

$$\forall \mathbf{x} \in L : \begin{cases} u(\mathbf{x}) = u^L \\ v(\mathbf{x}) = v^L \\ t(\mathbf{x}) = t(\mathbf{x}|L) \end{cases}$$

Dans cette relation, (u^L, v^L) est une paire de valeurs constantes le long de L et $t(\mathbf{x}|L)$ est une fonction qui interpole les valeurs du *temps* observé aux horizons $\{H_{t_0}, H_{t_1}, \dots, H_{t_n}\}$ que la ligne intersecte (figure 2.9).

De manière similaire, un horizon H_t correspond à un ensemble de particules sédimentaires déposées au même instant t et, par définition, la fonction $u(\mathbf{x})$ doit avoir une valeur constante t en tout point de H_t et doit donc respecter la *contrainte intrinsèque d'horizon* suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in H_{t_i} : t(\mathbf{x}) = t_i$$

2.3.2 Les différents styles de déformation

En géologie structurale, on distingue deux principaux types de déformation des couches (voir [Pomerol *et al.*, 2002], [Hills, 1963], [Ramsay, 1967]) : la flexure simple d'une plaque épaisse non-stratifiée ou *pure bending* (figure 2.10), et le glissement banc sur banc ou *flexural slip*⁶ (figure 2.12). Ces styles de déformation engendrent des méthodes de restau-

⁶Les termes anglais étant plus courants, ils seront généralement préférés aux termes français.

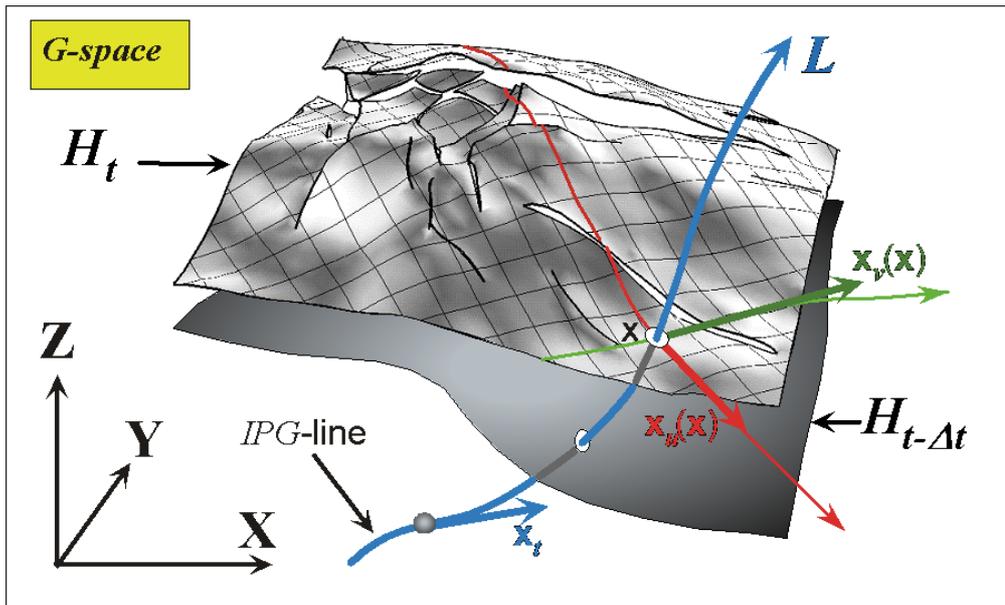


FIG. 2.9 : Intégration d'un horizon de référence et d'une ligne IPG dans la construction d'un modèle GeoChron. Quelle que soit la méthode de construction, les valeurs de t doivent être constantes sur chaque horizon et les valeurs de (u, v) doivent être constantes le long d'une ligne IPG ([Mallet, 2004]).

ration surfaciques ou volumiques différentes (voir [Rouby *et al.*, 2000], [Moretti et Larrère, 1989]).

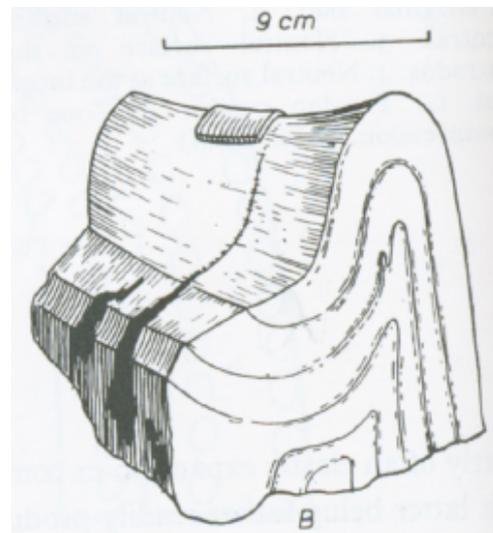
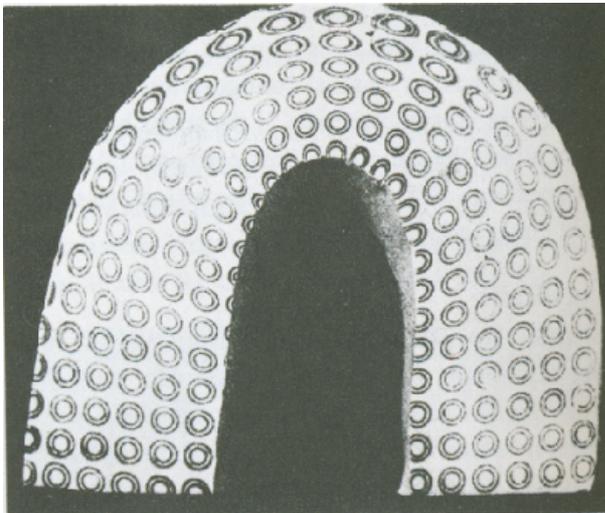


FIG. 2.10 : Déformation d'une couche par flexure simple (pure bending) d'une plaque homogène. À gauche, coupe dans un analogue d'un pli, illustrant la différence de déformation suivant la position dans le pli. À droite, vue en trois dimensions d'un pli réel. Noter la forme en « selle de cheval » le long de l'axe du pli ([Hills, 1963], pp. 86 et 222).

Dans le premier cas, les couches géologiques sont considérées comme des plaques épaisses homogènes, non stratifiées. Les terrains se déforment en se comprimant dans l'intrados du pli et en se dilatant dans l'extrados. Au milieu se trouve une surface virtuelle dite *surface neutre* ou *fibre neutre* (dans les problèmes en deux dimensions), le long de laquelle n'a lieu aucun changement de volume (figure 2.11). La position de cette surface neutre est conditionnée, dans le modèle GeoChron, par le choix d'un horizon de référence (paragraphe 3.1.2). Dans un modèle mécanique, cette surface dépend de la répartition des contraintes et de la nature du matériau formant la plaque, et elle influe aussi sur le tenseur de déformation et ses conséquences (par exemple, comme les longueurs ne changent pas sur cette surface neutre, il n'y a pas de fracturation à cet endroit). Ce problème sera discuté dans le paragraphe 5.2.3.

Géologiquement, plusieurs mécanismes peuvent accommoder, et donc révéler, ce type de déformation : nombreuses petites failles ou petits plis secondaires générés par la forte compression dans l'intrados du pli, fracturation ou apparition de fentes de tensions dans l'extrados, recristallisation dans l'intrados et l'extrados ou encore compression et dilatation sans rupture des matériaux.

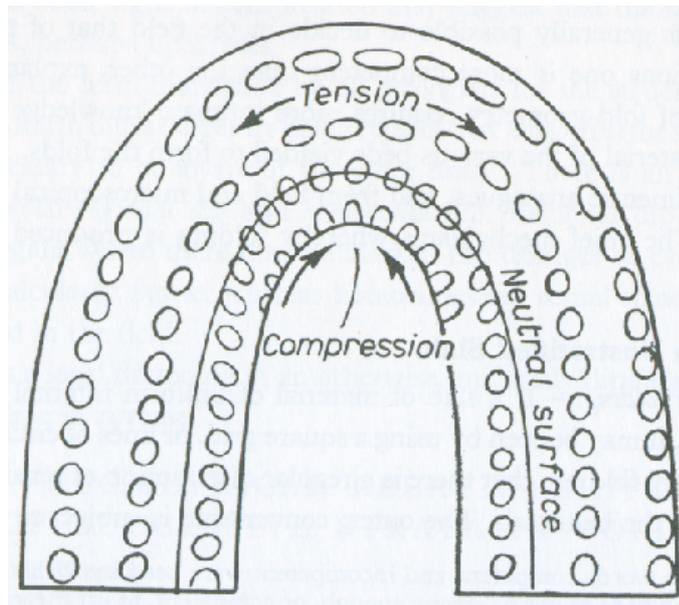


FIG. 2.11 : Définition de la fibre neutre dans une couche en pure bending. Un volume élémentaire (figuré par les cercles) situé sur cette fibre ou surface en 3D, n'est pas déformé. Les volumes au-dessus sont dilatés, ceux en dessous sont comprimés ([Hills, 1963], p. 220).

Dans un deuxième cas, on considère non plus une plaque homogène unique mais plutôt un empilement de couches fines de mêmes caractéristiques lithologiques. Lors de la déformation, ces couches vont pouvoir glisser les unes sur les autres, pour accommoder la déformation sans changer de longueur. Ce type de déformation se produit par exemple lorsqu'il existe une succession de couches rigides, donc qui ne peuvent que difficilement se dilater ou se comprimer, de faible épaisseur, avec des joints bien marqués entre couches,

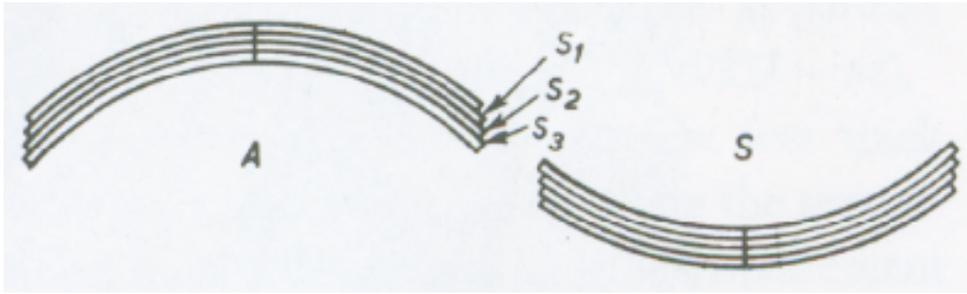


FIG. 2.12 : Déformation d'une couche par glissement banc sur banc (flexural slip), dans un anticlinal (A) et dans un synclinal voisin (S). Chaque sous-couche $S_1, S_2, S_3 \dots$ garde sa longueur d'origine après déformation ([Hills, 1963], p. 222).

comme les séries calcaires à bancs fins, ou encore quand on considère une couche épaisse mais très déformable, comme du sel ou des marnes.

La déformation par *flexural slip* se manifeste principalement au niveau des contacts entre bancs par des crochons ou des stries de glissement perpendiculaires à l'axe du pli. Au sein des couches, on peut voir apparaître des fractures internes sigmoïdales, souvent remplies de recristallisations.

Comme l'illustre la figure 2.7, le style de déformation influe sur la forme des lignes IPG, et donc sur les caractéristiques de la paramétrisation GeoChron. De plus, la complexité des facteurs qui contrôlent le type de déformation (caractéristiques des roches déformées, mode d'empilement des différentes couches, pression lithostatique globale, contraintes appliquées, etc.) rend très difficile la caractérisation a priori de la déformation.

La paramétrisation GeoChron doit donc être à même de prendre en compte les différents styles, mais il doit aussi être possible de modifier une paramétrisation initiale, soit globalement soit localement, pour prendre en compte des informations secondaires sur le style de déformation (voir paragraphe 3.2.3).

Les paragraphes suivants donnent quelques pistes sur l'intégration de ces styles dans la paramétrisation, elles seront développées dans le chapitre suivant. On ne considérera dans un premier temps que les deux cas extrêmes.

2.3.3 Déformation par flexure simple d'une plaque homogène (*pure bending*)

Dans le cas de la flexure simple d'une plaque, le cisaillement en tout point est minimal et les cercles de la figure 2.11 sont transformés en ellipses par dilatation parallèlement aux horizons. Par conséquent, un repère élémentaire orthonormé $(\mathbf{U}(\mathbf{x}), \mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{T}(\mathbf{x}))$ attaché à un point \mathbf{x} quelconque de la plaque non déformée se transforme en un repère $(\mathbf{x}_u(\mathbf{x}), \mathbf{x}_v(\mathbf{x}), \mathbf{x}_t(\mathbf{x}))$ orthogonal (mais plus normé).

Pour simuler ce type de déformation, il faut donc que les vecteurs $\mathbf{x}_u(\mathbf{x}), \mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_t(\mathbf{x})$ soient orthogonaux deux à deux. On a vu (équation 2.3) que ces vecteurs étaient orthogonaux aux vecteurs gradients de $u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})$ et $t(\mathbf{x})$.

On peut donc formuler une contrainte de *pure bending* comme suit :

$$\forall \mathbf{x} \in G : \begin{cases} \mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}_v(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}_t(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}_v(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}_t(\mathbf{x}) \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{grad} u \perp \mathbf{grad} v \\ \mathbf{grad} u \perp \mathbf{grad} t \\ \mathbf{grad} v \perp \mathbf{grad} t \end{cases} \quad (2.6)$$

Notons aussi que dans ce type de déformation, les lignes IPG restent parallèles aux lignes tangentes aux horizons, comme l'illustrent les figures 2.7 et 2.10. La première des deux méthodes proposées dans le chapitre suivant se base sur cette constatation.

2.3.4 Glissement banc sur banc (*flexural slip*)

Dans le cadre du *flexural slip*, la contrainte est cette fois-ci que chaque horizon, autant que possible, ne change pas de longueur. Cela signifie que la longueur des vecteurs élémentaires $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ ne doit pas changer et qu'ils doivent être autant que possible orthogonaux, sur un horizon H_τ donné :

$$\forall \mathbf{x} \in H_\tau : \begin{cases} \|\mathbf{x}_u(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}_v(\mathbf{x})\| = 1 \\ \mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Cette contrainte est similaire aux contraintes de paramétrisation 2D de type *paramétrisation isométrique*⁷ (voir par exemple [Samson, 1996] ou [Mallet, 2002]), elles-mêmes proches du *conformal mapping* (voir [Lévy et al., 2002] et paragraphe 3.1.2). Cette contrainte, exprimée sur un horizon donné, peut se généraliser à tout le volume d'étude.

Considérons les projections $\mathbf{grad}_H u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{grad}_H v(\mathbf{x})$ des gradients $\mathbf{grad} u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{grad} v(\mathbf{x})$ sur un horizon H_τ , définies comme la différence du gradient de $u(\mathbf{x})$ (respectivement $v(\mathbf{x})$) et de la composante normale, suivant $\mathbf{N}(\mathbf{x})$, de $u(\mathbf{x})$ (resp. $v(\mathbf{x})$) :

$$\forall \mathbf{x} \in H_\tau : \begin{cases} \mathbf{grad}_H u(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} u(\mathbf{x}) - (\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{grad}_H v(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} v(\mathbf{x}) - (\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

En utilisant la relation :

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$$

les relations de la contrainte précédente s'expriment alors comme :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_u(\mathbf{x})\|^2 &= \left(\frac{\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} t(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x})} \right)^2 \\ &= \frac{1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})} \cdot (\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \times \mathbf{N}(\mathbf{x}))^2 \\ &= \frac{1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})} \cdot (\|\mathbf{grad} v(\mathbf{x})\|^2 \cdot \|\mathbf{N}(\mathbf{x})\|^2 - (\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}))^2) \end{aligned}$$

⁷On parle de paramétrisation isométrique à cause de la contrainte d'égalité des normes à 1.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})} \cdot (\|\mathbf{grad} v(\mathbf{x})\|^2 - 2 \cdot (\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) + \\
 &\hspace{15em} (\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}))^2) \\
 &= \frac{1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})} \cdot (\|\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) - (\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})\|^2) \\
 &= \frac{1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})} \cdot \|\mathbf{grad}_H v(\mathbf{x})\|^2
 \end{aligned}$$

où $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ désigne le carré du produit mixte des gradients de u , v et du vecteur normal $\mathbf{N}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \left\| (\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) \right\|^2$$

De la même manière, on obtient $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ en fonction de $\mathbf{grad}_H u(\mathbf{x})$.

D'autre part, on peut vérifier que le produit scalaire de ces deux projections donne :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{grad}_H u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad}_H v(\mathbf{x}) &= \mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \\
 &\quad - (\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}))
 \end{aligned}$$

et donc que le produit de $\mathbf{x}_u(\mathbf{x})$ et $\mathbf{x}_v(\mathbf{x})$ est équivalent à :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}_v(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} t(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x})} \cdot \frac{\mathbf{grad} t(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} u(\mathbf{x})}{(\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} v(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{grad} t(\mathbf{x})} \\
 &= \frac{1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})} \cdot ((\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \times \mathbf{N}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{N}(\mathbf{x}) \times \mathbf{grad} u(\mathbf{x}))) \\
 &= \frac{1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})} \cdot ((\mathbf{grad} v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} u(\mathbf{x})) - \|\mathbf{N}(\mathbf{x})\|^2 \cdot (\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} v(\mathbf{x}))) \\
 &= \frac{-1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})} \cdot (\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} v(\mathbf{x}) - (\mathbf{grad} u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} v(\mathbf{x}))) \\
 &= \frac{-1}{\mathbf{D}(\mathbf{x})} \cdot \mathbf{grad}_H u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad}_H v(\mathbf{x})
 \end{aligned}$$

Par conséquent, si la compaction $\phi(\mathbf{x})$, ainsi que la dilation volumique $\theta(\mathbf{x})$ (voir paragraphe 5.2), sont nulles, les contraintes de *flexural slip* de l'équation 2.7 sont équivalentes aux contraintes suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in G : \begin{cases} \|\mathbf{grad}_H u(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{grad}_H v(\mathbf{x})\| = 1 \\ \mathbf{grad}_H u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad}_H v(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

On peut remarquer que ces contraintes spécifient implicitement la forme des lignes IPG et qu'il serait donc contradictoire de les utiliser en même temps que la contrainte intrinsèque IPG définie plus haut.

L'implémentation de ces contraintes est détaillée dans le chapitre suivant.

Conclusion

La paramétrisation GeoChron présentée dans cette partie a pour but de calculer une correspondance entre l'espace géologique observé actuellement et un espace paramétrique représentant l'espace de dépôt des sédiments. Cette correspondance, au travers de la fonction de paramétrisation, permet de représenter les terrains sédimentaires de manière cohérente avec leur position et leurs relations au moment de leur dépôt.

Dans la limite fixée par les hypothèses sur la géométrie des couches au moment de leur dépôt et l'identification des limites majeures pointées avec des horizons isochrones, ce modèle permet de formuler dans un contexte mathématique robuste les connaissances géologiques sur le domaine d'étude.

De plus, nous avons vu qu'il est possible d'exprimer sous forme mathématique la connaissance des différents styles de déformation géologique qui ont affecté les terrains au cours de leur histoire. Le modèle GeoChron permet donc de faire la transition entre des connaissances géologiques abstraites et une implémentation informatique, par l'intermédiaire de relations mathématiques.

Cependant, au-delà des quelques indications fournies dans la dernière partie, l'implémentation pratique d'un modèle GeoChron n'est pas triviale et plusieurs problèmes se posent. Dans un premier temps, nous avons vu dans le chapitre 1 qu'il était important de choisir un support adapté au calcul. Ensuite se pose la question du choix des algorithmes numériques, de leur robustesse ainsi que de leur implémentation.

Un grand nombre d'implémentations différentes sont envisageables, suivant les contraintes particulières de chaque contexte. Le chapitre suivant propose deux méthodes de construction d'une paramétrisation GeoChron basées sur les formules décrites dans ce chapitre. Ces méthodes sont privilégiées par leur généralité, leur similarité avec les formules mathématiques du modèle, ainsi que leur complémentarité.

