

# Conclusion

Le problème de la construction d'un maillage volumique en accord à la fois avec le réseau de failles et la stratigraphie n'est pas résolu de manière satisfaisante par les grilles stratigraphiques curvilinéaires. Le modèle GeoChron et son implémentation proposée dans ce travail permet en revanche d'atteindre une meilleure adéquation du modèle volumique et du modèle de propriété par la dissociation nette des trois concepts principaux que portent les grilles stratigraphiques :

- la géométrie du volume d'étude, représentée par les failles et les discontinuités majeures, est modélisée par un maillage non-structuré à base de tétraèdres ;
- la géométrie des horizons et le contexte sédimentaire sont modélisés au travers de la fonction de paramétrisation  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  ;
- enfin, le modèle de propriété est construit dans l'espace paramétrique qui est similaire à l'espace de dépôt et donc bien adapté aux hypothèses des algorithmes géostatistiques ou autres.

Ainsi, le modèle GeoChron permet d'obtenir des modèles de propriété à priori plus corrects que les grilles curvilinéaires, tout en utilisant les mêmes données de base et les mêmes méthodes de modélisation de propriété. Ce modèle peut donc être envisagé comme une alternative à ces grilles, améliorant la qualité des résultats.

De plus, le cadre mathématique théorique du modèle GeoChron ainsi que sa proximité avec l'espace de dépôt des sédiments (ou espace de Wheeler) nous ont permis de mettre en évidence d'autres caractéristiques intéressantes. Au-delà de la modélisation de propriété en elle-même, ce modèle peut en effet servir de base à des modèles stratigraphiques plus complexes. De plus, nous avons montré comment, sous certaines hypothèses, les équations de paramétrisation permettent d'obtenir une estimation du tenseur de déformation qui a affecté le volume. Il devient alors possible, en combinant un modèle de propriété purement stratigraphique avec l'influence des failles et des fractures, par le biais de la déformation, d'obtenir un modèle complet et réaliste.

D'autre part, les méthodes de construction que nous avons proposées ont plusieurs avantages. En plus de leur valeur intrinsèque et de leur adaptation à des contextes différents, les deux méthodes, locale et globale, peuvent en effet être regroupées pour permettre la construction d'une paramétrisation qui prend en compte au mieux les informations structurales, locales ou globales, sur le style de déformation des terrains.

Ces méthodes, et en particulier l'utilisation du paramètre *temps* de la paramétrisation, nous ont aussi permis de proposer un algorithme géométrique de construction des vecteurs rejet. Cet algorithme est véritablement 3D et il permet d'obtenir des vecteurs rejet

cohérents avec le réseau de failles et les horizons, en tout point du volume. Il constitue un élément central dans la construction d'un modèle GeoChron et il est à ce titre très important dans notre travail.

Comme nous l'avons montré, le modèle GeoChron permet l'intégration des différentes étapes de la modélisation du sous-sol (modèle volumique et modèle de propriété mais avec des liens en amont par le biais de la sismique, comme en aval par le biais des modèles d'écoulement). Par conséquent, ce modèle semble être un pas supplémentaire dans la direction du *Shared Earth Model* c'est-à-dire de l'intégration de toutes les connaissances qui concernent un réservoir dans un seul concept commun.

Cependant, le modèle GeoChron tel qu'il est présenté dans ce travail n'est encore qu'une ouverture et de nombreuses pistes restent encore à développer, sans compter le perfectionnement des méthodes proposées ici. En particulier, les mécanismes de construction d'une paramétrisation avec un style de déformation intermédiaire ne sont pour l'instant que des amorces qui restent à prospecter. D'une manière similaire, des améliorations peuvent encore être apportées au calcul des vecteurs rejet.

Plus généralement, trois axes de développement semblent particulièrement prometteurs et sont actuellement explorés dans la continuation de cette thèse :

- Dans le cadre de la modélisation des propriétés, le modèle GeoChron ouvre la porte à une modélisation plus fine et plus exacte des environnements de dépôt, par exemple par modélisation directe des processus sédimentaires et des séquences stratigraphiques ou encore par reconstruction des environnements de dépôt et de caractéristiques de ceux-ci, comme l'espace d'accommodation.
- En aval du modèle GeoChron, nous ne nous sommes peu ou pas du tout préoccupé des modèles d'écoulement au cours de ce travail. Cependant, plusieurs pistes semblent intéressantes, aussi bien dans le domaine de la construction rapide et précise de grilles d'écoulement en accord avec la géométrie du modèle et ses caractéristiques fluides que dans le domaine de la mise à jour de ces grilles au cours des simulations.
- Enfin, nous avons évoqué à plusieurs reprises des possibilités de mise à jour interactive rapide du modèle GeoChron lors de l'intégration de données supplémentaires ou de la réinterprétation de données existantes. Qu'il s'agisse de modifier la fonction de paramétrisation (le *temps* seul ou les trois composantes) ou encore le maillage lui-même, plusieurs voies sont à l'étude et permettraient certainement d'atteindre une meilleure intégration de la chaîne d'étude au sein d'un seul objet, le modèle GeoChron.

En parallèle de ces développements, il est à noter que l'utilisation simultanée d'un maillage non-structuré et d'un modèle de propriété structuré régulier, reliés par une fonction de paramétrisation, met en évidence le besoin de développer un domaine à cheval sur la géologie et sur l'informatique concernant les méthodes de visualisation en trois dimensions du modèle géométrique et du modèle de propriété ainsi que de n'importe quelles autres données.

Par ailleurs, le modèle n'a actuellement été testé que sur quelques jeux de données, représentatifs d'une grande variété de contextes géologiques mais forcément limités. Il

---

sera donc nécessaire de poursuivre les tests afin de prouver concrètement l'efficacité de ce modèle et en particulier son intégration avec les autres étapes de la chaîne de modélisation.

Enfin, même si nous proposons ici des méthodes de construction et des applications qui sont très proches des équations théoriques, nous ne prétendons nullement que ce soient les seules méthodes et applications possibles. Le modèle GeoChron et tout spécialement son idée de base, la séparation de la géométrie, la paramétrisation et le modèle de propriété, est certainement utilisable suivant d'autres méthodes et dans d'autres buts que ceux exposés ici.



# Annexe A

## Principe de l'interpolateur DSI

Le géomodeleur GOCAD, dans le cadre duquel ces travaux ont été développés, propose un moteur d'interpolation puissant, appelé *Discrete Smooth Interpolation* ou *DSI*. Cet outil présente de nombreux avantages et a été utilisé à plusieurs reprises dans cette thèse. Nous présentons ici le principe de cet interpolateur. Pour plus de détails sur DSI, le lecteur est invité à se reporter à [Mallet, 1997] et [Mallet, 1992] ou encore [Mallet, 2002] qui détaillent plus largement la théorie ou encore [Cognot, 1996] pour des indications sur une implémentation de DSI.

### A.1 Principe général

La méthode DSI permet l'interpolation d'une fonction scalaire ou vectorielle  $\varphi$  sur un ensemble  $\Omega$  de  $m$  nœuds  $\alpha$  reliés par une fonction de voisinage  $N$  définissant un maillage discret, tout en respectant un ensemble  $C$  de contraintes  $c$ . On appelle *modèle*  $\mathcal{M}(\Omega, N, \varphi, C)$  le cadre dans lequel s'exerce l'interpolateur DSI.

La fonction (ou propriété)  $\varphi$  à interpoler pouvant être scalaire ou vectorielle de dimension  $n$ , on écrira :

$$\forall \alpha \in \Omega \mapsto \varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} \varphi^1(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi^\nu(\alpha) \\ \vdots \\ \varphi^n(\alpha) \end{bmatrix}$$

Un vecteur  $\varphi$ , contenant  $m.n$  éléments, est défini en regroupant les valeurs de la fonction en tous les nœuds, pour tous les champs :

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^\nu \\ \vdots \\ \varphi^n \end{bmatrix} \quad \text{avec } \varphi^\nu = \begin{bmatrix} \varphi^\nu(\alpha_1) \\ \vdots \\ \varphi^\nu(\alpha_i) \\ \vdots \\ \varphi^\nu(\alpha_m) \end{bmatrix}$$

L'interpolateur vise à minimiser simultanément :

- la rugosité de la propriété  $\varphi$  interpolée ;
- et le degré global de violation d'un ensemble de contraintes  $C$ .

Nous allons maintenant détailler chacun de ces termes.

## A.2 Contraintes et rugosité

### A.2.1 La rugosité locale

La rugosité est définie grâce à la connaissance des liaisons entre nœuds, donnée par la fonction  $N$ , application de  $\Omega$  vers  $\Omega$  :

$$\forall \beta \in \Omega, \beta \in N(\alpha) \quad \iff \quad \beta \text{ est à moins de } s \text{ nœuds de } \alpha$$

En d'autres termes,  $N(\alpha)$  contient les  $s$  « auréoles » de nœuds autour de  $\alpha$ . Dans la plupart des cas,  $s = 1$ , c'est-à-dire que seuls les nœuds directement reliés à  $\alpha$  sont pris en compte dans le voisinage de  $\alpha$ .

Le critère de rugosité locale  $R(\varphi|\alpha)$  est alors défini ainsi pour une propriété scalaire<sup>1</sup> :

$$R(\varphi|\alpha) = \left[ \sum_{\beta \in N(\alpha)} v(\alpha, \beta) \cdot \varphi(\beta) \right]^2$$

où  $v(\alpha, \beta)$  est une fonction de pondération des différents voisins de  $\alpha$ . En règle générale, on utilise  $v(\alpha, \beta) = 1, \forall \beta \in N(\alpha)$  et  $v(\alpha, \alpha) = -\text{Card } N(\alpha)$ , ce qui entraîne une interpolation isotrope de  $\varphi$ . On peut cependant noter que si les distances entre les nœuds sont très variables, cette pondération peut provoquer des biais car un nœud  $\beta_1$  loin de  $\alpha$  influera autant sur la valeur de  $\varphi(\alpha)$  qu'un nœud  $\beta_2$  proche de  $\alpha$ . Nous avons proposé une contrainte spécifique permettant de contourner ce défaut (paragraphe B.3.2).

L'ensemble des rugosités locales  $R(\varphi|\alpha)$  est utilisé pour définir une rugosité globale  $R(\varphi)$  grâce à une fonction de raideur (*stiffness*)  $\mu(\alpha)$  :

$$R(\varphi) = \sum_{\alpha \in \Omega} \mu(\alpha) \cdot R(\varphi|\alpha)$$

### A.2.2 Les contraintes DSI

L'interpolateur DSI peut prendre en compte un grand nombre de contraintes très différentes, du moment qu'elles peuvent s'exprimer sous la forme linéaire suivante :

$$\{c \in C^{\infty} \text{ est respectée} \} \iff \sum_{\alpha \in \Omega} \sum_{\nu=1}^n A_c^\nu(\alpha) \cdot \varphi^\nu(\alpha) \bowtie b_c$$

---

<sup>1</sup>Pour une propriété vectorielle, la rugosité locale est définie comme la somme des rugosités associées à chaque composante de la propriété.

où  $\bowtie$  représente l'un des trois opérateurs suivants :

$$\bowtie \in \{\simeq, =, >\}$$

Comme expliqué dans [Mallet, 2002] et comme nous le verrons par la suite, cette formulation laisse place à une grande variété de contraintes. On distingue deux grandes familles de contraintes, les contraintes *dures* et les contraintes *souples* (*hard* et *soft constraints*) : les premières doivent être absolument respectées ( $\bowtie \in \{=, >\}$ ), les deuxièmes seront respectées au sens des moindres carrés ( $\bowtie = \simeq$ ). Dans ce travail, les contraintes souples  $\mathcal{C}^\simeq$  seront les seules utilisées et nous ne considérerons plus que celles-ci à partir de maintenant.

L'équation précédente est reformulée sous forme matricielle en introduisant une matrice colonne  $A_c$  de dimension  $m.n$  et en utilisant le vecteur  $\varphi$  défini plus haut :

$$\{c \in \mathcal{C}^\simeq \text{ est respectée } \} \iff A_c^t \cdot \varphi \simeq b_c$$

Les contraintes sont généralement normalisées de telle sorte que la somme sur  $\nu$  et sur  $\alpha$  des coefficients de  $A_c^t(\alpha)$  soit égale à 1.

On peut alors définir pour chaque contrainte  $c$  le degré de violation  $\rho(\varphi|c)$  :

$$\rho(\varphi|c) = |A_c^t \cdot \varphi - b_c|^2$$

et, de manière similaire à la rugosité globale définie par la somme des rugosités locales, un degré de violation global des contraintes est défini grâce à une série de poids  $\varpi_c$  correspondant à un facteur de confiance en chaque contrainte  $c$  :

$$\rho(\varphi) = \sum_{c \in \mathcal{C}^\simeq} \varpi_c \cdot \rho(\varphi|c)$$

### A.2.3 Rugosité généralisée

Afin de minimiser simultanément la rugosité locale et le degré de violation de l'ensemble des contraintes, une *rugosité généralisée globale*  $R^*(\varphi)$  est définie :

$$R^*(\varphi) = R(\varphi) + (\phi \cdot \varpi) \cdot \rho(\varphi)$$

où  $\phi$  est un facteur d'ajustement (*fitting factor*) permettant d'influencer les contributions relatives de la rugosité et des contraintes. Si  $\phi$  est supérieur à 1 alors il est plus important de respecter les contraintes que de minimiser la rugosité de la solution. À l'inverse, si  $\phi$  est inférieur à 1, on cherche en priorité à obtenir une solution lisse plus qu'à respecter les contraintes souples.  $\varpi$  est un facteur d'équilibrage (*balancing factor*) entre  $R(\varphi)$  et  $\rho(\varphi)$  (voir [Mallet, 2002] pour le calcul de  $\varpi$ ).

L'algorithme DSI vise alors à minimiser cette rugosité généralisée c'est-à-dire à résoudre le système  $\partial R^*(\varphi)/\partial \varphi = 0$ .

### A.3 Résolution numérique

Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre l'équation précédente. La première méthode consiste en une résolution directe du système linéaire. Elle a été proposée dès 1992 ([Mallet, 1992]) mais a été laissée de côté dans un premier temps, essentiellement pour des raisons de puissance de calcul.

Le géomodeleur G $\circ$ CAD, jusqu'aux versions les plus récentes, s'appuie donc sur une deuxième méthode qui consiste en une formulation locale de l'équation DSI en chaque nœud associée à un algorithme itératif permettant d'obtenir une solution approchée du problème. Cette méthode est décrite en détail par exemple dans [Mallet, 2002].

Récemment, grâce à de nouveaux travaux ainsi qu'à une augmentation significative de la puissance de calcul des ordinateurs, une nouvelle version de l'algorithme matriciel global a été proposée par Muron et Mallet ([Muron *et al.*, 2005a]), s'affranchissant ainsi de la formulation locale. Certaines méthodes classiques d'accélération de la convergence comme le gradient conjugué (décrit par exemple par [Cognot, 1996] dans le cadre de DSI) permettent d'obtenir plus rapidement une solution du problème, que ce soit avec la formulation locale ou avec la formulation matricielle.

Dans le cadre de ce travail, la formulation matricielle a été préférée car elle a deux avantages principaux sur la formulation locale :

- Du point de vue du développement de nouvelles contraintes, les formules mathématiques qui sont réellement implémentées sont identiques à la formulation générique des contraintes (de type  $A_c^t \cdot \varphi = b_c$ ) alors que la formulation locale nécessite une réécriture des contraintes sous une forme légèrement différente. La programmation et la vérification du code produit sont très fortement simplifiées.
- Du point de vue de l'utilisation, cette implémentation est plus rapide. Elle est cependant difficile à utiliser pour des contraintes dynamiques, c'est-à-dire qui n'affectent pas toujours le même élément géométrique, ce qui restreint fortement son utilisation pour l'interpolation de la géométrie d'un objet. Comme dans ce travail nous ne chercherons qu'à interpoler des propriétés, cette limitation n'est pas gênante.

L'annexe B donne plus de détails sur la formulation de contraintes DSI s'appliquant sur un ou plusieurs tétraèdres et présente une galerie de contraintes simples qui ont été implémentées au cours de cette thèse.

# Annexe B

## Interpolation de propriétés sur des tétraèdres

Cette annexe présente le formalisme utilisé pour construire des contraintes DSI relatives à des propriétés définies aux nœuds de tétraèdres. Quelques outils numériques de calcul permettant de traiter toutes les géométries de tétraèdres sont aussi donnés.

Ce formalisme est utilisé dans le cadre de l'interpolateur DSI (décrit dans l'annexe A) et les contraintes DSI correspondantes sont principalement utilisées dans la construction du modèle GeoChron (chapitre 3). Le cadre de définitions ainsi que les contraintes fournies ici ont été formulées par J.-L. Mallet ([Mallet, 2003]).

### B.1 Fonction linéaire définie sur un tétraèdre

Considérons un tétraèdre  $T = T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  dont les nœuds  $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  sont plongés dans un espace géométrique euclidien à trois dimensions  $(x, y, z)$ . On suppose qu'une propriété quelconque  $\varphi(x, y, z)$  est définie aux sommets de ce tétraèdre et a pour valeurs  $\{\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \varphi(\alpha_3)\}$ . Entre ces valeurs, la propriété est supposée varier linéairement à l'intérieur de  $T$ .

En conséquence, pour tout point  $p(x, y, z)$  situé à l'intérieur de  $T$ , la propriété  $\varphi(x, y, z)$  peut être représentée comme une fonction linéaire dont les coefficients  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$  dépendent de  $\{\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \varphi(\alpha_3)\}$  et de la géométrie de  $T$  :

$$\forall (x, y, z) \in T \quad \varphi(x, y, z) = [1, x, y, z] \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Notons par  $(x_i, y_i, z_i)$  les coordonnées du nœud  $\alpha_i$  de  $T$ . Les coefficients  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$  sont alors la solution du système linéaire suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}}_M \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_0) \\ \varphi(\alpha_1) \\ \varphi(\alpha_2) \\ \varphi(\alpha_3) \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Il est alors possible d'exprimer  $\varphi(x, y, z)$  comme une combinaison linéaire des valeurs  $\{\varphi(\alpha_0), \varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2), \varphi(\alpha_3)\}$  :

$$\forall (x, y, z) \in T \quad \varphi(x, y, z) = \underbrace{[1, x, y, z]}_{[b_0, b_1, b_2, b_3]} \cdot M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_0) \\ \varphi(\alpha_1) \\ \varphi(\alpha_2) \\ \varphi(\alpha_3) \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Les coefficients  $\{b_0, b_1, b_2, b_3\}$  ainsi définis sont les coordonnées barycentriques du point  $(x, y, z)$  par rapport aux nœuds  $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  du tétraèdre  $T$ . De plus, les dérivées de  $\varphi$  par rapport à  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont constantes dans  $T$ .

Si on note  $D_x(\alpha_i)$ ,  $D_y(\alpha_i)$  et  $D_z(\alpha_i)$  les coefficients définis par :

$$\begin{bmatrix} D_x(\alpha_0) & D_x(\alpha_1) & D_x(\alpha_2) & D_x(\alpha_3) \\ D_y(\alpha_0) & D_y(\alpha_1) & D_y(\alpha_2) & D_y(\alpha_3) \\ D_z(\alpha_0) & D_z(\alpha_1) & D_z(\alpha_2) & D_z(\alpha_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M^{-1}$$

alors les dérivées de  $\varphi$  s'expriment comme des combinaisons linéaires de  $\varphi(\alpha_0)$ ,  $\varphi(\alpha_1)$ ,  $\varphi(\alpha_2)$  et  $\varphi(\alpha_3)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \sum_{i=0}^3 D_x(\alpha_i) \cdot \varphi(\alpha_i) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \sum_{i=0}^3 D_y(\alpha_i) \cdot \varphi(\alpha_i) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \sum_{i=0}^3 D_z(\alpha_i) \cdot \varphi(\alpha_i) \end{aligned}$$

Si on désigne par  $m$  la matrice carrée suivante :

$$m = \begin{bmatrix} (x_1 - x_0) & (x_2 - x_0) & (x_3 - x_0) \\ (y_1 - y_0) & (y_2 - y_0) & (y_3 - y_0) \\ (z_1 - z_0) & (z_2 - z_0) & (z_3 - z_0) \end{bmatrix}$$

alors il est aisé de vérifier que les coefficients  $D_x(\alpha_i)$ ,  $D_y(\alpha_i)$  et  $D_z(\alpha_i)$  peuvent être calculés par l'équation :

$$\begin{bmatrix} D_x(\alpha_0) & D_x(\alpha_1) & D_x(\alpha_2) & D_x(\alpha_3) \\ D_y(\alpha_0) & D_y(\alpha_1) & D_y(\alpha_2) & D_y(\alpha_3) \\ D_z(\alpha_0) & D_z(\alpha_1) & D_z(\alpha_2) & D_z(\alpha_3) \end{bmatrix} = m^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

Dans la suite du texte, pour plus de clarté, nous utiliserons les vecteurs  $\mathbf{D}(\alpha_i)$  définis comme :

$$\mathbf{D}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} D_x(\alpha_i) \\ D_y(\alpha_i) \\ D_z(\alpha_i) \end{bmatrix} \quad \forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Avec cette notation, on obtient :

$$[\mathbf{D}(\alpha_0), \mathbf{D}(\alpha_1), \mathbf{D}(\alpha_2), \mathbf{D}(\alpha_3)] = m^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le gradient de  $\varphi$  dans  $T$  s'exprime alors ainsi :

$$\mathbf{grad} \varphi = \begin{bmatrix} \partial\varphi/\partial x \\ \partial\varphi/\partial y \\ \partial\varphi/\partial z \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^3 \mathbf{D}(\alpha_i) \cdot \varphi(\alpha_i) \quad (\text{B.3})$$

Il est fréquemment utile d'exprimer le produit scalaire entre le gradient de  $\varphi$  et un vecteur donné  $\mathbf{W}$ . Nous introduisons donc la notation suivante qui simplifiera les équations correspondantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{W} &= \sum_{i=0}^3 D(\alpha_i | \mathbf{W}) \cdot \varphi(\alpha_i) \\ \text{avec : } D(\alpha_i | \mathbf{W}) &= \mathbf{D}(\alpha_i) \cdot \mathbf{W}, \forall i \in \{0, 1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

### B.1.1 Comment calculer précisément $M^{-1}$ ?

Le paragraphe précédent fournit les bases mathématiques nécessaires au calcul des différentes contraintes DSI. Cependant, deux problèmes numériques peuvent apparaître lors de la résolution des systèmes linéaires et de l'inversion des matrices.

Si l'origine du système de coordonnées  $(x, y, z)$  est très éloignée de la position du tétraèdre  $T$  alors les coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$  de ses nœuds sont numériquement très proches, seuls les derniers chiffres différant. Les lignes de la matrice  $M$  deviennent alors presque identiques et le calcul numérique de l'inverse  $M^{-1}$  devient très instable. Pour éviter cette première source d'instabilités, nous proposons de translater l'origine du système de coordonnées au voisinage de  $T$ , par exemple sur le nœud  $\alpha_0$ . En d'autres termes, la transformation suivante est appliquée en tout point de l'espace :

$$\begin{aligned} x &\leftarrow x - x_0 \\ y &\leftarrow y - y_0 \\ z &\leftarrow z - z_0 \end{aligned}$$

La matrice  $m$  devient alors :

$$m = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

Si on note par  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{0}$  les deux matrices suivantes :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{0} = [0 \ 0 \ 0]$$

alors il est facile de vérifier que  $M$  s'exprime en fonction de  $m$ , et  $M^{-1}$  en fonction de  $m^{-1}$  :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{J} & m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ (-m^{-1} \cdot \mathbf{J}) & m^{-1} \end{bmatrix}$$

Il devient alors possible de calculer l'inverse de  $M$  qui est une matrice carrée  $4 \times 4$  en calculant plus simplement l'inverse de  $m$  qui est une matrice  $3 \times 3$ .

### B.1.2 Cas particulier où $T$ est dégénéré

Le deuxième problème numérique apparaît lorsque le tétraèdre considéré est dégénéré, c'est-à-dire que sa forme est très éloignée du tétraèdre équilatéral (voir [Lepage, 2003]). On peut en effet observer que le volume  $|T|$  d'un tétraèdre est égal à un sixième du déterminant de la matrice  $m$  associée :

$$\det(M) = \det(m) = 6 \cdot |T|$$

En conséquence, si  $T$  est dégénéré et que son volume est nul alors les matrices  $M$  et  $m$  ne sont pas inversibles et la plupart des équations présentées précédemment sont indéfinies. De même, numériquement, si le tétraèdre est presque dégénéré, de fortes instabilités numériques apparaissent (l'inverse de la matrice variant très fortement pour de faibles variations de la géométrie).

On peut choisir, en utilisant les inverses généralisées (voir par exemple [Bellman, 1960] et [Luenberger, 1969]), une matrice particulière notée  $m^\dagger$ , dite *pseudo-inverse* de  $m$ , telle que :

$$m^\dagger = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (m^t \cdot m + \varepsilon \cdot \mathbf{I})^{-1} \cdot m^t$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice unité  $3 \times 3$ , et  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

On vérifie également que, si  $m$  est inversible, alors, à la limite, quand  $\varepsilon$  est égal à 0,  $m^\dagger = m^{-1}$ . Si  $m$  n'est pas inversible, on peut utiliser cette équation avec une valeur de  $\varepsilon$  suffisamment petite pour obtenir une bonne approximation de  $m^\dagger$ . En pratique, après quelques tests, il semble qu'on puisse choisir :

$$\varepsilon \simeq \frac{\text{trace}(m^t \cdot m)}{10000}$$

---

Ces équations peuvent être utilisées dans tous les cas pour calculer une pseudo-inverse  $M^\dagger$  de  $M$ . En pratique, lorsque la valeur de  $M^{-1}$  sera nécessaire, un test sera effectué sur le tétraèdre correspondant pour vérifier s'il est dégénéré, c'est-à-dire si le rapport entre l'arête la plus courte et l'arête la plus longue du tétraèdre est inférieur à un seuil donné ou si le rapport du volume du tétraèdre sur le déterminant de la matrice  $m$  associée est supérieur à un seuil fixé.

Si le tétraèdre est considéré comme dégénéré, alors la pseudo-inverse  $M^\dagger$  est utilisée, sinon on utilise normalement l'inverse  $M^{-1}$ . La pseudo-inverse n'est pas utilisée systématiquement car du fait que l'on ne prend pas  $\varepsilon = 0$  mais seulement une valeur approchée, on introduit un très léger biais. On limite donc l'usage de  $M^\dagger$  aux seuls cas où c'est indispensable.

## B.2 Contraintes DSI sur une propriété

Après avoir posé les bases des interpolations de propriétés sur un tétraèdre, nous allons passer en revue les contraintes DSI souples les plus utilisées dans ce travail. On peut distinguer deux grandes familles de contraintes : celles qui agissent directement sur les valeurs de la propriété aux nœuds d'un tétraèdre et celles qui agissent sur le gradient de la propriété (et donc aussi sur les valeurs de la propriété elle-même mais indirectement). La première famille contient deux contraintes, les points de contrôle et la contrainte delta.

### B.2.1 Les points de contrôle

Cette contrainte est la plus simple. On cherche à imposer qu'une propriété  $\varphi$  prenne une valeur fixée  $\phi$  en un point  $p^* = (x^*, y^*, z^*)$  contenu dans un tétraèdre  $T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . D'après l'équation B.2, on veut donc obtenir :

$$\underbrace{[1, x^*, y^*, z^*].M^{-1}}_{[b_0, b_1, b_2, b_3]} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_0) \\ \varphi(\alpha_1) \\ \varphi(\alpha_2) \\ \varphi(\alpha_3) \end{bmatrix} = \phi$$

Cette équation nous donne la contrainte DSI  $c(T, p^*)$  suivante :

$$c : \begin{cases} A_c(\alpha) = b_i & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ A_c(\alpha) = 0 & \text{sinon} \\ b_c = 0 \end{cases}$$

### B.2.2 La contrainte delta

Dans certains cas, l'écart de valeurs d'une propriété  $\varphi$  entre deux points est connu et il serait souhaitable d'intégrer cette connaissance dans une interpolation DSI. Ces deux points peuvent être géométriquement voisins tout comme ils peuvent être distants l'un

de l'autre. Cette contrainte est utilisée par exemple dans le cadre de l'intégration de connaissances sur le vecteur rejet dans une interpolation (voir chapitre 4).

Soit deux tétraèdres  $T^\diamond = T(\alpha_0^\diamond, \alpha_1^\diamond, \alpha_2^\diamond, \alpha_3^\diamond)$  et  $T^* = T^*(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)$  qui contiennent deux points  $(x^\diamond, y^\diamond, z^\diamond)$  et  $(x^*, y^*, z^*)$  respectivement. On souhaiterait que l'écart entre les valeurs de  $\varphi$  entre ces deux points soit égal à une certaine constante  $\Delta^1$  :

$$\varphi(x^\diamond, y^\diamond, z^\diamond) - \varphi(x^*, y^*, z^*) = \Delta$$

Notons  $M^\diamond$  et  $M^*$  les deux matrices définies par l'équation B.1 sur les tétraèdres  $T^\diamond$  et  $T^*$ . L'équation précédente devient alors :

$$\underbrace{[1, x^\diamond, y^\diamond, z^\diamond].M^\diamond - 1}_{[b_0^\diamond, b_1^\diamond, b_2^\diamond, b_3^\diamond]} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_0^\diamond) \\ \varphi(\alpha_1^\diamond) \\ \varphi(\alpha_2^\diamond) \\ \varphi(\alpha_3^\diamond) \end{bmatrix} - \underbrace{[1, x^*, y^*, z^*].M^* - 1}_{[b_0^*, b_1^*, b_2^*, b_3^*]} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\alpha_0^*) \\ \varphi(\alpha_1^*) \\ \varphi(\alpha_2^*) \\ \varphi(\alpha_3^*) \end{bmatrix} = \Delta$$

Ou encore :

$$\sum_{i=0}^3 (b_i^\diamond \cdot \varphi(\alpha_i^\diamond) - b_i^* \cdot \varphi(\alpha_i^*)) = \Delta$$

Cette dernière équation correspond à la contrainte DSI  $c(T^\diamond, T^*, \Delta)$  appelée *contrainte delta* :

$$c : \begin{cases} A_c(\alpha) = b_i^\diamond & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0^\diamond, \alpha_1^\diamond, \alpha_2^\diamond, \alpha_3^\diamond\} \\ A_c(\alpha) = b_i^* & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*\} \\ A_c(\alpha) = 0 & \text{sinon} \\ b_c = \Delta \end{cases}$$

## B.3 Contraintes DSI sur le gradient d'une propriété

Les contraintes précédentes s'intéressaient uniquement à la valeur de la propriété  $\varphi$  elle-même. Or, les chapitre 2 à 4 utilisent de nombreuses équations qui font intervenir le gradient de  $\varphi$ . Nous allons donc détailler quelques contraintes sur le gradient.

### B.3.1 Projection du gradient

Il est parfois utile d'imposer la norme du gradient (généralement égale à 1) sans spécifier son orientation. Cependant, la formulation de la norme d'un vecteur  $\mathbf{u} = [u_x \ u_y \ u_z]$  :

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

est fonction du carré des composantes du vecteur et ne peut donc pas être transformée facilement en contrainte DSI (une linéarisation par la formule de Taylor est possible mais elle nécessite de négliger certains termes et elle est numériquement coûteuse).

---

<sup>1</sup>En pratique, le plus fréquemment,  $\Delta$  est égal à 0 mais cette contrainte est valable pour n'importe quelle valeur.

Toutefois, il est possible d'exprimer que la *projection* d'un vecteur, par exemple le gradient d'une propriété  $\varphi$ , sur un axe donné défini par un vecteur unité  $\mathbf{W}$  doit avoir une certaine longueur  $l_W$  :

$$\mathbf{grad} \varphi \cdot \mathbf{W} = l_W$$

En utilisant l'équation B.4, on obtient :

$$\sum_{i=0}^3 D(\alpha_i | \mathbf{W}) \cdot \varphi(\alpha_i) = l_W$$

qui se transforme aisément en la contrainte DSI  $c = c(T, \mathbf{W})$  sur le tétraèdre  $T$  :

$$c : \begin{cases} A_c(\alpha) = D(\alpha | \mathbf{W}) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ A_c(\alpha) = 0 & \text{sinon} \\ b_c = l_W \end{cases}$$

Remarque : si  $\mathbf{W}$  n'est pas unitaire, il est plus rapide d'utiliser  $l'_W = l_W / \|\mathbf{W}\|$  qui ne demande qu'une division plutôt que de renormaliser  $\mathbf{W}$ , ce qui nécessite trois divisions (une pour chaque composante de  $\mathbf{W}$ ).

### B.3.2 Gradient constant entre deux tétraèdres

Il existe plusieurs manières avec l'interpolateur DSI pour s'assurer qu'une propriété  $\varphi$  donnée est la plus continue et lisse possible sur le support d'interpolation. En général, on utilise pour cela la rugosité (voir paragraphe A.2.1). Comme la pondération usuellement choisie est isotrope et donc indépendante de la géométrie des simplexes, elle engendre un biais dès lors que les tétraèdres (ou les triangles en deux dimensions) ne sont pas parfaitement équilatéraux.

Une autre manière de spécifier une continuité maximale de la propriété est d'imposer que le gradient de cette propriété soit égal sur deux tétraèdres voisins. Comme le calcul du gradient prend en compte la géométrie des tétraèdres, cette contrainte est indépendante de la forme du support.

Considérons deux tétraèdres  $T^\diamond = T(\alpha_0^\diamond, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  et  $T^* = T^*(\alpha_0^*, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  adjacents qui partagent la face  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ . Soit  $\mathbf{N}$  un vecteur non nul orthogonal à  $\mathcal{F}$  et  $\mathbf{F}$  un vecteur inclus dans  $\mathcal{F}$ . L'objectif est de contraindre une propriété  $\varphi$  à avoir le même gradient sur  $T^\diamond$  et  $T^*$ , soit :

$$\mathbf{grad}^\diamond \varphi = \mathbf{grad}^* \varphi$$

où  $\mathbf{grad}^\diamond$  (respectivement  $\mathbf{grad}^*$ ) désigne le gradient de  $\varphi$  sur  $T^\diamond$  (respectivement  $T^*$ ).

Si l'on décompose les deux gradients suivant  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{F}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}^\diamond \varphi &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{grad}_N^\diamond \varphi + \mathbf{F} \cdot \mathbf{grad}_F^\diamond \varphi \\ \mathbf{grad}^* \varphi &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{grad}_N^* \varphi + \mathbf{F} \cdot \mathbf{grad}_F^* \varphi \end{aligned}$$

Or la projection du gradient d'une propriété sur une face d'un tétraèdre est égale au gradient de cette propriété calculé dans cette face uniquement. La face  $\mathcal{F}$  étant commune à  $T^\diamond$  et  $T^*$ , le gradient de  $\varphi$  dans  $\mathcal{F}$  est le même des deux côtés :

$$\text{grad}_F^\diamond \varphi = \text{grad}_F^* \varphi$$

Donc :

$$\mathbf{grad}^\diamond \varphi = \mathbf{grad}^* \varphi \iff \mathbf{N}.\text{grad}_N^\diamond \varphi = \mathbf{N}.\text{grad}_N^* \varphi$$

En utilisant la notation définie en B.4 :

$$\begin{aligned} D^\diamond(\alpha|\mathbf{N}) &= D^\diamond(\alpha).\mathbf{N} \quad \forall \alpha \in \{\alpha_0^\diamond, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ D^*(\alpha|\mathbf{N}) &= D^*(\alpha).\mathbf{N} \quad \forall \alpha \in \{\alpha_0^*, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \end{aligned}$$

L'égalité des gradients peut donc se formuler ainsi :

$$D^\diamond(\alpha_0^\diamond|\mathbf{N}).\varphi(\alpha_0^\diamond) + \sum_{i=0}^3 D^\diamond(\alpha_i|\mathbf{N}).\varphi(\alpha_i) = D^*(\alpha_0^*|\mathbf{N}).\varphi(\alpha_0^*) + \sum_{i=0}^3 D^*(\alpha_i|\mathbf{N}).\varphi(\alpha_i)$$

ce qui est équivalent à la contrainte  $c(T^\diamond, T^*)$  suivante :

$$c : \begin{cases} A_c(\alpha) = & D^\diamond(\alpha|\mathbf{N}) & \text{si } \alpha = \alpha_0^\diamond \\ A_c(\alpha) = & D^*(\alpha|\mathbf{N}) & \text{si } \alpha = \alpha_0^* \\ A_c(\alpha) = & D^\diamond(\alpha|\mathbf{N}) - D^*(\alpha|\mathbf{N}) & \text{si } \alpha \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ A_c(\alpha) = & 0 & \text{sinon} \\ b_c = & 0 \end{cases}$$

# Références bibliographiques

- ANTONELLINI, A. et AYDIN, A. *Effect of faulting on fluid flow in porous sandstones : petrophysical properties*. The American Association of Petroleum Geologists Bulletin, 1994, vol. 78, pp. 181–201.
- ARPAT, B. et CAERS, J. *Reservoir Characterization Using Multiple-Scale Geological Patterns*. In Proceedings of the 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Cannes, France, 2004.
- BALAVEN, S., BENNIS, C., BOISSONNAT, J.-D. et YVINEC, M. *Conforming Orthogonal Meshes*. In Proceedings of the 11th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories, Williamsburg, VA, 2002. pp. 219–230.
- BELLMAN, R. E. *Introduction to Matrix Analysis*. McGraw Hill, New York, 1960.
- BROWN, A. R. *The value of seismic amplitude*. The Leading Edge, 1987, vol. 6 (10), pp. 30–33.
- CAERS, J. *Geostatistical reservoir modeling using statistical pattern recognition*. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2001, vol. 29 (3), pp. 177–188.
- CATUNEANU, O. *Sequence stratigraphy of clastic systems : concepts, merits, and pitfalls*. Journal of African Earth Sciences, 2002, vol. 35, pp. 1–43.
- CATUNEANU, O., WILLIS, A. J. et MIALL, A. D. *Temporal significance of sequence boundaries*. Sedimentary Geology, 1998, vol. 121, pp. 157–178.
- CAUMON, G. *Représentation, visualisation et modification de modèles volumiques pour les géosciences*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2003.
- CHILÈS, J.-P. et DELFINER, P. *Geostatistics — Modeling spatial uncertainties*. Wiley-Interscience, New York, 1999.
- CHIPOT, Y. *Génération et modification de surfaces triangulées*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1991.
- COGNOT, R. *La méthode D.S.I. : optimisation, implémentation et applications*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1996.
- COJAN, I. et RENARD, M. *Sédimentologie*. Masson, Paris, 1997.
- CONRAUD, J. *Génération de Maillages de Simplexes pour la Modélisation d’Objets Naturels*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1997.
- DEUTSCH, C.V. et JOURNEL, A.G. *GSLIB : Geostatistical Software Library and User’s Guide (second edition)*. Oxford University Press, New York, 1998.

- DEUTSCH, C. V., TRAN, T. T. et PYRCZ, M. J. *Geostatistical Assignment of Reservoir Properties on Unstructured Grids*. In Proceedings of the Annual Technical Conference, paper 77427. SPE, Houston, 2002.
- DUBRULE, O., BASIRE, C., BOMBARDE, S., SAMSON, P. et SEGONDS, D. *Reservoir Geology Using 3-D Modelling Tools*. In SEG Proceedings, 1997.
- DUVINAGE, I. *Création et mise en cohérence de modèles structuraux à partir d'horizons extraits de données sismiques tri-dimensionnelles*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2000.
- EMERY, D. et MYERS, K. J. *Sequence Stratigraphy*. Blackwell Science, 1996.
- ENRIGHT, W. H., HIGHAM, D. J., OWREN, B. et SHARP, P. W. *A Survey of the Explicit Runge-Kutta Method*. n° 94-291, 1994. <http://ciseer.ist.psu.edu/enright95survey.html>.
- EULER, N. *Modélisation volumique, contrainte et libertés*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1999.
- FLANDRIN, N., BOROUCAKI, H. et BENNIS, C. *3D Hybrid Mesh Generation for Reservoir Flow Simulation*. In Proceedings of the 13th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories, Williamsburg, VA, 2004. pp. 133–144.
- FRANK, T. *Exploring the tetrahedral decomposition of the subsurface*. In Proceedings of the 24th GOCAD meeting, Nancy, 2004.
- FRANK, T. *Advanced Rendering and Geological Co-Visualization of Tetrahedral Meshes*. In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.
- GALERA, C., BENNIS, C., MORETTI, I. et MALLET, J.-L. *Construction of coherent 3D geological blocks*. Computers and Geosciences, 2003, vol. 29, pp. 971–984.
- GEORGE, P.-L. et BOROUCAKI, H. *Triangulation de Delaunay et maillage : Applications aux Éléments finis*. Éditions Hermès, Paris, 1997.
- GOOVAERTS, P. *Geostatistics for natural resources evaluation*. Oxford University Press, New York, 1997.
- GROSSE, O. *Remise en cohérence d'un modèle géologique 3D*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2002.
- GUIPON, M. *Contribution de la fracturation diffuse à la déformation d'ensemble durant le plissement de roches sédimentaires*. Th. Doct. École Polytechnique. Paris, France, 2001.
- HEINEMANN, Z. E. et HEINEMANN, G. *Lecture notes : Gridding techniques for reservoir simulation*. In Proceedings of the 7th International Forum on Reservoir Simulation, 2003.
- HILLS, E. S. *Elements of structural geology*. John Wiley & Sons, New York, 1963.
- HIRASAKI, G. J. et DELL, P. M. *Representation of Reservoir Geometry for Numerical Simulation*. Society of Petroleum Engineers Journal, 1970, vol. 10, pp. 393–404.
- HUANG, Y. *Modélisation et Manipulation des Surfaces Triangulées*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1990.

- 
- JOURNAL, A. G. et HUIJBREGTS, C J. *Mining Geostatistics*. Blackburn Press, 2004.
- KEDZIERSKI, P., LE SOLLEUZ, A., MALLET, J.-L. et ROYER, J.-J. *Sedimentological and Stratigraphic Modeling Combining Membership Functions and Sequence Stratigraphy Principles*. In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.
- KEDZIERSKI, P., ROYER, J.-J. et MALLET, J.-L. *Building a 3D Wheeler Diagram for Stratigraphic Modeling*. In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.
- LABBÉ, P., DOMPIERRE, J., GUIBAULT, F. et CAMARERO, R. *On element shape measures for mesh optimization*. In Proceedings of the 2nd Symposium on Trends in Unstructured Mesh Generation, during the 5th US National Congress on Computational Mechanics, 1999.
- LABRUNYE, E. *Extraction automatique d'information géologique à partir d'images sismiques tridimensionnelles*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2004.
- LAVAU, G. *Analyse vectorielle : gradient, rotationnel et divergence*. École des Mines d'Alès, France, 2004. <http://www.ema.fr/CMGD/MMS/Cours/optapp/opvect.pdf>.
- LEDEZ, D. *Modélisation d'objets naturels par formulation implicite*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2003.
- LEFLON, B. et MASSONNAT, G. *Neptune Project – Modelling and Simulation of Carbonate Environments*. In Proceedings of the 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Cannes, France, 2004.
- LEPAGE, F. *Génération de maillages tridimensionnels pour la simulation des phénomènes physiques en géosciences*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2003.
- LEVENTHAL, S. H., KLEIN, M. H. et CULHAM, W. E. *Curvilinear Coordinate Systems for Reservoir Simulation*. Society of Petroleum Engineers Journal, 1985, vol. 25, pp. 893–900.
- LÉVY, B. *Topologie algorithmique : Combinatoire et plongement*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1999.
- LÉVY, B., PETITJEAN, S., RAY, N. et MAILLOT, J. *Least square conformal maps for automated texture atlas generation*. In SIGGRAPH 2002, 2002.
- LIENHARDT, P. *N-Dimensional Generalized Combinatorial Maps and Cellular Quasi-Manifolds*. Journal on Computational Geometry and Applications, 1994, vol. 4, pp. 275–324.
- LOMASK, J. *Flattening 3-D seismic cubes without picking*. In Proceedings of the 73rd Annual International Meeting. Society of Exploration Geophysicists, 2003.
- LORENSEN, W. E. et CLINE, H. E. *Marching cubes : a high resolution 3d surface construction algorithm*. In Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. ACM Press, 1987. pp. 163–169.
- LUENBERGER, D. G. *Optimization by vector space methods*. John Wiley, New York, 1969.
- MACÉ, L., SOUCHE, L. et MALLET, J.-L. *3D Fracture Characterization based on Geomechanics and Geologic Data Uncertainties*. In Proceedings of the 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Cannes, France, 2004.

- MACÉ, L., SOUCHE, L. et MALLET, J.-L. *3D Fracture Network Modeling Integrating Geomechanical and Geological Data*. In AAPG International Conference and Exhibition. Cancun, Mexico, 2004.
- MALLET, J.L. *Geomodeling*. Oxford University Press, New York, 2002.
- MALLET, J.-L. *Discrete Smooth Interpolation in geometric modeling*. Computer-Aided Design Journal, 1992, vol. 24.
- MALLET, J.-L. *Discrete modelling for natural objects*. Mathematical Geology, 1997, vol. 29, N.2.
- MALLET, J.-L. *Constraining a piecewise linear function defined on a 3D complex (Applications to 3D restoration)*. In Proceedings of the 23th GOCAD meeting, Nancy, 2003.
- MALLET, J.-L. *Space-Time Mathematical Framework for Sedimentary Geology*. Mathematical Geology, 2004, vol. 36, N.1.
- MALLET, J.-L. *A Unified Model for Reservoir Characterization*. In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.
- MANZOCCHI, P. N. T., WALSH, J. J. et YIELDING, G. *Fault transmissibility multipliers for flow simulation models*. Petroleum Geoscience, 1999, vol. 5, pp. 53–63.
- MASSONNAT, G. *Breaking of a paradigm : geology can provide 3D complex probability fields for stochastic facies modelling*. In SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 1999.
- MASSOT, J. *Implémentation de méthodes de dépliage 3d*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2002.
- MLACNIK, M., DURLOFSKY, L. J. et HEINEMANN, Z. E. *Dynamic flow-based PEBI grids for reservoir simulation*. In Proceedings of the Annual Technical Conference (SPE 22889), paper 90009. SPE, 2004.
- MÖLLER, T. et HAINES, E. *Real-Time Rendering*. A K Peters, Ltd., 1999.
- MORETTI, I. et LARRÈRE, M. *LOCACE : Computer-Aided Construction of Balanced Geological Cross-Section*. Geobyte, 1989, pp. 16–24.
- MURON, P., MALLET, J.-L. et HOVADIK, J. *An Efficient and Extensible Interpolation Framework Based on the Matrix Formulation of the Discrete Smooth Interpolation*. In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.
- MURON, P., MALLET, J.-L. et MEDWEDEFF, D. A. *3D Sequential Structural Restoration : Geometry and Kinematics*. In 2005 AAPG Annual Convention. Calgary, Canada, 2005.
- MURON, P., MALLET, J.-L. et ROYER, J.-J. *3D balanced unfolding and rock properties*. In Proceedings of the 24th GOCAD meeting, Nancy, 2004.
- NELSON, R. A. *Geologic Analysis of Naturally Fractured Reservoirs*. Butterworth-Heinemann, 2001.
- POLLOCK, D.W. *Semianalytical Computation of Path Lines for Finite-Difference Models*. Ground Water, 1988, vol. 26(6), pp. 743–750.

- 
- POMEROL, C., LAGABRIELLE, Y. et RENARD, M. *Éléments de géologie*. Dunod, Paris, 2002.
- PRESS, H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T. et FLANNERLY, B.P. *Numerical recipes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- PRÉVOST, M., EDWARDS, M.G. et BLUNT, M.J. *Streamline Tracing on Curvilinear Structured and Unstructured Grids*. In Proceedings of the 2001 SPE Reservoir Simulation Symposium (paper 66347). Houston, TX, 2001.
- PREVOST, M., LEPAGE, F., DURLOFSKY, L.J. et MALLET, J.-L. *Unstructured 3D gridding and upscaling for coarse modeling of geometrically complex reservoirs*. In Proceedings of the 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Cannes, France, 2004.
- RAMSAY, J. G. *Folding and fracturing of rocks*. McGraw-Hill, 1967.
- RENARD, P. et DE MARSILY, G. *Calculating equivalent permeability : A review*. Advances in Water Resources, 1997, vol. 20 (5–6), pp. 253–278.
- ROUBY, D. *Restauration en carte des domaines faillés en extension : méthode et applications*. Th. Doct. Université de Rennes I. Rennes, France, 1994.
- ROUBY, D., COBBOLD, P. R., SZATMARI, P., DEMERCIAN, S., COELHO, D. et R., Ricci. *Least squares palinspastic restoration of regions of normal faulting. Application to the Campos Basin (Brazil)*. Tectonophysics, 1993, vol. 28 (221), pp. 439–452.
- ROUBY, D., XIAO, H. et SUPPE, J. *3D restoration of complexly folded and faulted surfaces using multiple unfolding mechanism*. AAPG Bulletin, 2000, vol. 84 (6), pp. 805–829.
- RUTTEN, K. W. *Validating Seismic Correlations by Unfaulting and Multi-horizon Flattening*. In 66th EAGE annual meeting. Paris, France, 2004.
- SAMPL, P. *Semi-structured mesh generation based on medial axis*. In Proceedings of the 9th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories, Williamsburg, VA, 2000. pp. 21–32.
- SAMSON, P. *Équilibrage de structures géologiques 3D dans le cadre du projet gOcad*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1996.
- SÉDOV, L. *Mécanique des milieux continus, tome 1*. Éditions Mir, Moscou, 1975.
- SHEFFER, A. et DE STURLER, E. *Parameterization of faceted surfaces for meshing using angle-based flattening*. Engineering with computers, 2001, vol. 17, pp. 326–337.
- SHEWCHUK, J. R. *Adaptive precision floating-point arithmetic and fast robust geometric predicates*. School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1996.
- SHIPTON, Z. et COWIE, P. *A conceptual model for the origin of fault damage zone structures in high porosity sandstone*. Journal of Structural Geology, 2003, vol. 25 (3), pp. 333–344.
- SILLIPHANT, L. J., ENGELDER, T. et GROSS, M. R. *The state of stress in the limb of the Split Mountain anticline, Utah : constraints placed by transected joints*. Journal of Structural Geology, 2002, vol. 24, pp. 155–172.
- SOKOLNIKOFF, I. S. *Tensor analysis : Theory and applications to geometry and mechanics of continua*. Wiley, New York, 1964.

- SOUCHE, L. *Méthodes numériques pour la représentation des failles et des structures géologiques faillées*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2005.
- SRIVASTAVA, R. M. et ISAACS, E. H. *Applied Geostatistics*. Oxford University Press, 1990.
- STARK, T. J. *Relative geologic time (age) volumes — Relating every seismic sample to a geologically reasonable horizon*. The Leading Edge, 2004, vol. 23 (9), pp. 928–932.
- STREBELLE, S. *Conditional simulation of complex geological structures using multi-point statistics*. Mathematical Geology, 2002, vol. 34 (1), pp. 1–21.
- TANER, M. T., KOEHLER, F. et SHERIFF, R. E. *Complex seismic trace analysis*. Geophysics, 1979, vol. 44 (6), pp. 1041–1063.
- TERTOIS, A.-L. *Real-time edition of faults in a tetrahedralized volume*. In Proceedings of the 25th GOCAD meeting, Nancy, 2005.
- THIELE, M. R. *Streamline Simulation*. In 6th International Forum on Reservoir Simulation. Schloss Fuschl, Austria, 2001.
- THOBIE, S.A. *Colour interpolation applied to synthetic animation*. In 4th. International Conference, Pacific Graphics'94/CADDM'94, Beijing, China, 1994.
- THOMPSON, D. S. et SONI, B. K. *Generation of Quad and Hex Dominant Semistructured Meshes Using an Advancing Layer Scheme*. In Proceedings of the 8th International Meshing Roundtable. Sandia National Laboratories, Williamsburg, VA, 1999.
- THOMPSON, J. F., SENI, B. K. et WEATHERILL, N. P. *Handbook of grid generation*. CRC Press, 1999.
- THOMPSON, Z. W. J. et MASTIN, C. *Numerical grid generation*. Elsevier, 1985.
- TUREYEN, O. I., KARACALI, O. et CAERS, J. *A Parallel, Multiscale Approach to Reservoir Modeling*. In Proceedings of the 9th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery. Cannes, France, 2004.
- VAIL, P. R., MITCHUM, R. M. et THOMPSON, S. *Seismic stratigraphy and global changes of sea level, Part 3 : Relative changes of sea level from coastal onlap*. Seismic Stratigraphy - Applications to Hydrocarbon Exploration. C.E. Payton (ed.), 1977, vol. 26, pp. 63–81.
- VELTEN, W. *Effective Seismic Modeling in 3D Earth Models*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 1998.
- VERMA, S. *Flexible Grids for Reservoir Simulation*. Th. Doct. Stanford University. Stanford, California, USA, 1996.
- VOILLEMONT, J.-C. *Caractérisation par micro-sismicité induite des milieux poreux fracturés. Modélisations par la méthode des lignes de courant d'un site géothermique HDR (Sultz-sous-Forêts, France)*. Th. Doct. Institut National Polytechnique de Lorraine. Nancy, France, 2001.
- WEILER, K. *Topology as a Framework for solid Modeling*. In Proceedings of Graphics Interface, 1984. pp. 53–56.

- 
- WEILER, K. *The Radial Edge Structure : A Topological Representation for Non-Manifold Geometric Boundary Modeling*. In Proceedings of the IFIG WG 5.2, 1986.
- WHEELER, H. E. *Time-stratigraphy*. Bulletin of the American Association of Petroleum Geologist, 1958, vol. 42, N.5, pp. 1047–1063.
- WILKINS, S. J. et GROSS, M. R. *Normal fault growth in layered rocks at Split Mountain, Utah : influence of mechanical stratigraphy on dip linkage, fault restriction and fault scaling*. Journal of Structural Geology, 2002, vol. 24, pp. 1413–1429.
- ZIENKIEWICZ, O. C. *The finite element method*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1977.



# Résumé

## PARAMÉTRISATION 3D DE L'ESPACE EN GÉOLOGIE SÉDIMENTAIRE : LE MODÈLE GEOCHRON

La modélisation des réservoirs pétroliers passe par une étape de construction d'une grille volumique généralement adaptée aux failles et aux horizons du domaine, sur laquelle les modèles de propriétés pétrophysiques sont calculés. On utilise pour cela des *grilles curvilinéaires stratigraphiques* formées de cellules hexaédriques dont les indices  $(i, j, k)$  constituent un échantillonnage d'une fonction paramétrique 3D  $(u, v, t)$  où  $(u, v)$  correspondent aux coordonnées « paléo-géographiques » tangentielles aux horizons et  $(t)$ , considéré comme un analogue de l'âge géologique des terrains, est approximativement orthogonal aux horizons.

Ces grilles sont bien adaptées aux algorithmes géostatistiques de modélisation de propriétés mais leur régularité topologique entraîne des erreurs ou des approximations dans les domaines fortement faillés ou plissés. Le modèle GeoChron corrige ces défauts en séparant clairement la géométrie du domaine d'étude (représentée par un maillage tétraédrique non structuré), la correspondance entre cette géométrie et la géométrie des couches au moment de leur formation (grâce à une fonction de paramétrisation 3D  $(u, v, t)$ ) et le modèle de propriété (calculé dans une grille régulière fine).

Après avoir exposé le cadre mathématique de ce modèle qui met en valeur les similarités avec les diagrammes de *time stratigraphy* (ou de Wheeler) utilisés en sédimentologie, nous indiquons deux méthodes pratiques de construction d'une telle paramétrisation, implémentées dans le cadre du géomodeleur GOCAD. Puis nous montrons comment la composante  $(t)$  de la fonction de paramétrisation peut être utilisée pour calculer automatiquement en tout point d'une surface de faille une estimation géométrique du vecteur rejet. Enfin, nous présentons plusieurs applications possibles concernant la modélisation des propriétés pétrophysiques, l'estimation des déformations ou encore l'intégration des données sismiques.

# Abstract

## 3D PARAMETERISATION OF THE GEOLOGICAL SPACE IN SEDIMENTARY GEOLOGY : THE GEOCHRON MODEL

Reservoir modelling requires building a volumic mesh usually adapted to faults and horizons of the domain, on which petrophysical property models are computed. The common practice consists in using *stratigraphic curvilinear grids* formed of hexahedral cells whose indexes  $(i, j, k)$  constitute a sampling of a 3D parametric function  $(u, v, t)$  where  $(u, v)$  correspond to the "paleo-geographic" coordinates tangent to the horizons and  $(t)$ , viewed as an analog to the geological age of the terrains, is approximately orthogonal to the horizons.

These grids are suited to the property-modelling geostatistical algorithms but their topological regularity induces errors or approximations in complex fault networks or folded environments. The GeoChron model corrects these drawbacks by clearly segregating the geometry of the domain of study (modelled by an unstructured tetrahedralised mesh), the link between this geometry and the geometry of the layers at the time of deposition (thanks to a 3D parametric function  $(u, v, t)$ ) and the property model (computed in a regular fine-scaled grid).

After exposing the mathematical framework of this model which emphasises the similarity with time stratigraphic (or Wheeler) diagrams used in sedimentology, we show two practical ways of building such a parameterisation and their implementation in the GOCAD geomodelling software. Then we show how the  $(t)$  component of the parametric function can be used to automatically compute a geometric estimate of the throw vector in any point of a fault surface. Finally, we present some applications concerning petrophysical property modelling, deformation estimation or seismic data integration.

